Μάθημα 29ο - Μη πεπερασμένα όρια στο χο

Β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των α , β $\in \Re$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις

i) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\alpha x^2+x-2}{x-1}=\lambda\in\Re$ ii) το $\lim_{x\to 1}\dfrac{\alpha x^2+x-2}{x-1}$ υπάρχει

iii) $\lim_{x\to 1}\dfrac{(\alpha-1)x^2+x-\beta}{x-1}=3$ iv) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\alpha^2x^2-\alpha}{(x-1)^3}=\lambda\in\Re$

v) $\lim_{x\to \alpha}\dfrac{x^2+\alpha}{x^2-4x+\alpha^2}=+\infty$ v) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{\alpha\chi^2+\beta\chi+4}{\chi^2-2\chi+1}\right)=\lambda\in\Re$

iii) Θέτω $f(x)=\dfrac{(a-1)x^2+x-b}{x-1}, x\neq 1$ οπότε $\lim_{x\to 1} f(x)=3$

$(x-1)f(x)=(a-1)x^2+x-b \Rightarrow \lim_{x\to 1}(x-1)f(x)=\lim_{x\to 1}\left((a-1)x^2+x-b\right)$

$\Rightarrow 0\cdot 3=a-1+1-b \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow \boxed{a=b}$ (1)

οπότε $f(x)\overset{(1)}{=}\dfrac{(a-1)x^2+x-a}{x-1}=\dfrac{(x-1)\left[(a-1)x+a\right]}{x-1}=(a-1)x+a$ (2)

$a-1$	1	$-a$	1
	$a-1$	a	
$a-1$	a	0	

οπότε $\lim_{x\to 1} f(x)=3 \overset{(2)}{\Longrightarrow}$

$\lim_{x\to 1}((a-1)x+a)=3 \Rightarrow a-1+a=3 \Rightarrow$

$2a=4 \Rightarrow \boxed{a=2}$

$(1)\Rightarrow \boxed{b=2}$

iv) $\lim_{x\to 1}\dfrac{a^2x^2-a}{(x-1)^3}=\lambda\in R$

Θέτω $f(x)=\dfrac{a^2x^2-a}{(x-1)^3}$ $x\neq 1$ $\Rightarrow (x-1)^3\cdot f(x)=a^2x^2-a \Rightarrow$

$\lim_{x\to 1}\left((x-1)^3 f(x)\right)=\lim_{x\to 1}(a^2x^2-a) \Rightarrow 0\cdot\lambda=a^2-a \Rightarrow a(a-1)=0$

$a=0$ ή $a=1$

Για $a=0$ $f(x)=\dfrac{0x^2-0}{(x-1)^3}=0$ οπότε $\lim_{x\to 1} f(x)=0$, $a=0$ δεκτή

Για $a=1$ $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x-1)^3}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^3}=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

Για $a=1$ $\quad f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x-1)^3}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^3}=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

όμως $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{(x-1)^2}=+\infty$, $a=1$ απορρίπτεται

Τελικά $\boxed{a=0}$

v) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+a}{x^2-4x+a^2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to a}(x^2+a)=a^2+a$ $\quad$, $\lim\limits_{x\to a}(x^2-4x+a^2)=a^2-4a+a^2=2a^2-4a$

Αν $2a^2-4a\neq 0$ τότε $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+a}{x^2-4x+a^2}=\dfrac{a^2+a}{2a^2-4a}\in\mathbb{R}$ Άτοπο

Άρα $2a^2-4a=0 \Leftrightarrow 2a(a-2)=0 \Leftrightarrow a=0$ ή $a=2$

Για $a=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2-4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x(x-4)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x-4}=0$ Άτοπο

Για $a=2$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2}{x^2-4x+4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2}{(x-2)^2}=+\infty$ Δεκτή

Άρα $\boxed{a=2}$

vi) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+bx+4}{(x-1)^2}=\lambda\in\mathbb{R}$ $\quad$ Θέτω $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+4}{(x-1)^2}$, $x\neq 1$

$(x-1)^2 f(x)=ax^2+bx+4 \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1}\left((x-1)^2 f(x)\right)=\lim\limits_{x\to 1}(ax^2+bx+4) \Rightarrow$

$0\cdot\lambda=a+b+4 \Rightarrow \boxed{b=-a-4}$ (1)

οπότε $f(x)=\dfrac{ax^2+(-a-4)x+4}{}=\dfrac{(x-1)(ax-4)}{}=\dfrac{ax-4}{}\Rightarrow$

Οπότε $f(x) = \dfrac{ax^2 + (-a-4)x + 4}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)(ax-4)}{(x-1)^2} = \dfrac{ax-4}{x-1} \Rightarrow$

a	$-a-4$	4	1
	a	-4	
a	-4	0	

$$(x-1)f(x) = ax-4 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}(x-1)f(x) = \lim_{x\to 1}(ax-4) \Rightarrow$$

$$0 \cdot 2 = a-4 \Rightarrow \boxed{a=4}$$

και $(1) \Rightarrow \boxed{b=-8}$

Επαλήθευση: $f(x) = \dfrac{4x^2-8x+4}{(x-1)^2} = \dfrac{4(x^2-2x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{4(x-1)^2}{(x-1)^2} = 4 \quad , x \neq 1$

οπότε $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$

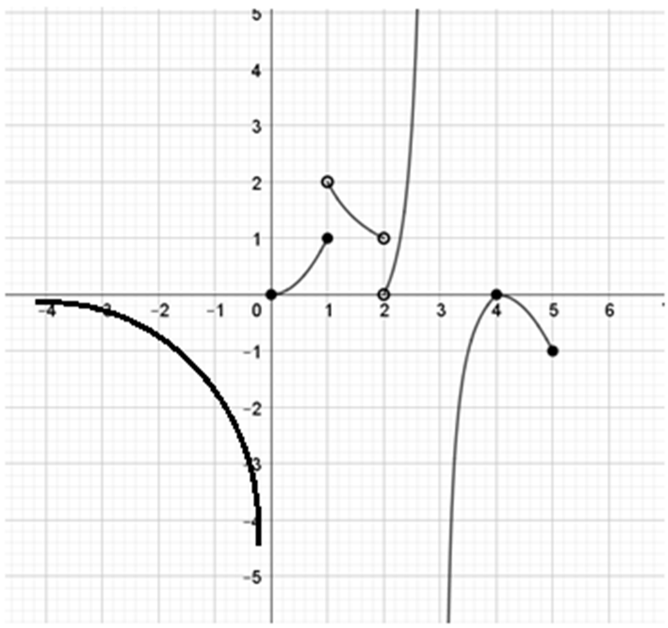
Θέμα 7ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Με βάση το παρακάτω σχήμα να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν και για όσα δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

i. $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to3}(f(x)+\ln(x-3))$ iii. $\lim\limits_{x\to3}(f(x)\cdot\ln(3-x))$ iv. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1}{f(x)}$

v. $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ vi. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{f(x-|x|)}\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x-|x|}\right)$ vii. $\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)\right)$ viii. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{f(x)}{x-5}$

ix. $\lim\limits_{x\to0^-} f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$ x. $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{f(x)-2}$ xi. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)}{x-3}$ xii. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-\frac{3}{2}}{x-1}$ xiii. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln f(x)}{f(x)}$



i) $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = -\infty$ οπότε το $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ δεν υπάρχει

ii) $\lim\limits_{x\to3}\left(f(x)+\ln(x-3)\right) = \lim\limits_{x\to3^+}\left(f(x)+\ln(x-3)\right) = -\infty$

Πρέπει $x-3>0$
$x>3$

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to3^+}\ln(x-3) \overset{\substack{\text{θέτω} \\ x-3=u}}{\underset{\substack{x\to3^+ \\ u\to0^+}}{=}} \lim\limits_{u\to0^+}\ln u = -\infty$

iii) $\lim\limits_{x\to3}\left(f(x)\cdot\ln(3-x)\right) = \lim\limits_{x\to3^-}\left(f(x)\cdot\ln(3-x)\right) = -\infty$

Πρέπει $3-x>0$
$x<3$

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to3^-}\ln(3-x) \overset{\substack{\text{θέτω} \\ 3-x=u}}{=} \lim\limits_{u\to0}\ln u = -\infty$

iv) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to4} f(x) = 0$, για $x\to4$ $f(x)<0$

v) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ οπότε το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει

vii) $\lim_{x\to 0}\left(f(x)\cdot ημ\frac{1}{f(x)}\right)$ δεν υπάρχει διότι

• $\lim_{x\to 0^+}\left(f(x)\, ημ\frac{1}{f(x)}\right) = 0$ διότι

$$\left|ημ\frac{1}{f(x)}\right| \le 1 \Rightarrow |f(x)|\left|ημ\frac{1}{f(x)}\right| \le |f(x)| \Rightarrow$$

$$-|f(x)| \le f(x)\cdot ημ\frac{1}{f(x)} \le |f(x)|$$

$\lim_{x\to 0}|f(x)| = 0$ Από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x\to 0^+} f(x)\cdot ημ\frac{1}{f(x)} = 0$

• $\lim_{x\to 0^-}\left(f(x)\cdot ημ\frac{1}{f(x)}\right) = \lim_{u\to 0}\frac{1}{u}ημu = \lim_{u\to 0}\frac{ημu}{u} = 1$

Θέτω $\frac{1}{f(x)} = u \Rightarrow f(x) = \frac{1}{u}$

Είναι $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{f(x)} = 0$ και $\frac{1}{f(x)} < 0$ για $x\to 0^-$

οπότε για $x\to 0^-$, $u\to 0^-$

viii) $\lim_{x\to 5}\frac{f(x)}{x-5} = \lim_{x\to 5^-} f(x)\cdot\frac{1}{x-5} = +\infty$

$D_f = (-\infty,2)\cup(2,3)\cup(3,5]$ οπότε $x\to 5^-$

$\lim_{x\to 5^-} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 5^-}\frac{1}{x-5} = -\infty$

x) $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{f(x)-2} = -\infty$

$\lim_{x\to 1^+}(f(x)-2) = 0$ αφού $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$ όμως για $x\to 1^+$, $f(x) < 2$

$f(x)-2<0$

xi) $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3} = -\infty$, αφού

xi) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)}{x-3} = -\infty$, αφού

• $\lim\limits_{x\to 3^+} \left(f(x)\dfrac{1}{x-3}\right) = -\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to 3^-} \left(f(x)\cdot\dfrac{1}{x-3}\right) = -\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$

xii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-\frac{3}{2}}{x-1} = +\infty$, αφού

• $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(f(x)-\frac{3}{2}\right)\dfrac{1}{x-1} = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(f(x)-\frac{3}{2}\right) = 2-\frac{3}{2} > 0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(f(x)-\frac{3}{2}\right)\dfrac{1}{x-1} = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(f(x)-\frac{3}{2}\right) = 1-\frac{3}{2} < 0$, $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$