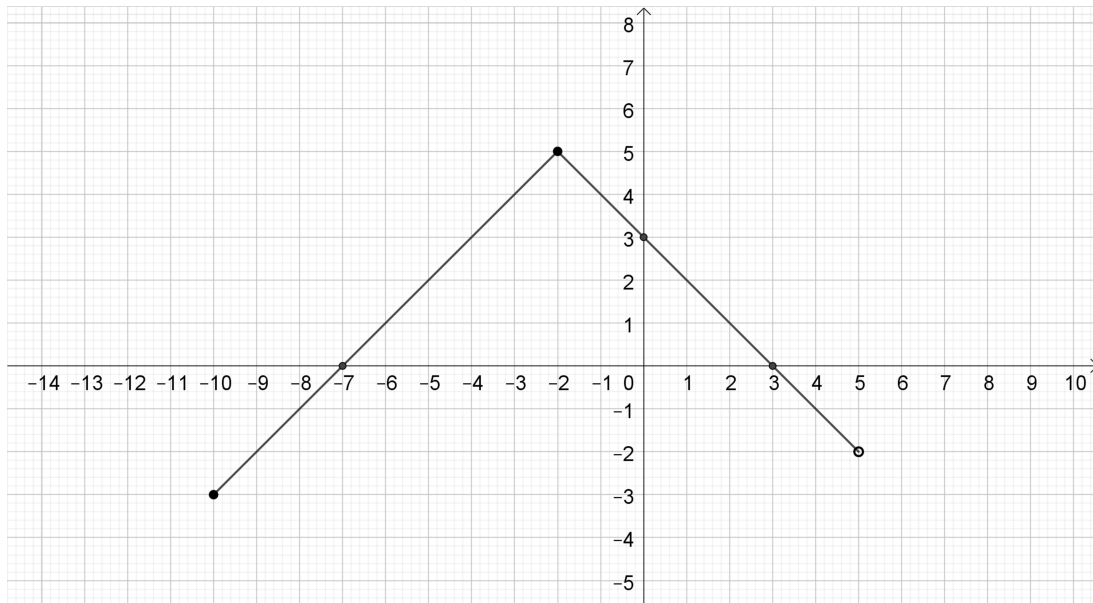


ΘΕΜΑ 1ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



$$A = [-10, 5)$$

$$f(A) = [-3, 5]$$

$$f(-2) = 5$$

$$f(0) = 3$$

$$f(3) = 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 3 \\ x = -7 \end{matrix}$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [-10, -7) \cup (3, 5)$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σύνολο τιμών της $f(A)$.

β) Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$.

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = 0$.

δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) < 0$.

ε) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$.

$$A \checkmark \quad \kappa > 5 \quad \text{καμία ρίζα}$$

$$A \checkmark \quad \kappa = 5 \quad \text{μία ρίζα}$$

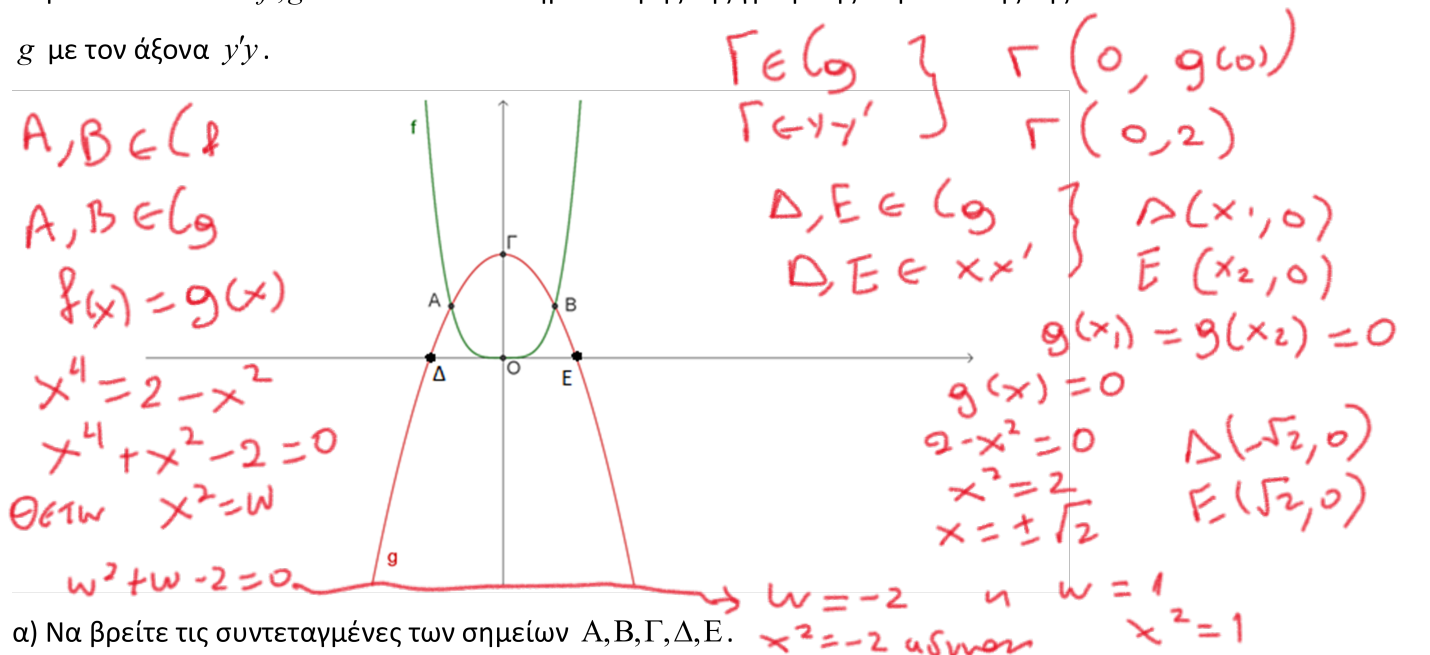
$$A \checkmark \quad -2 < \kappa < 5 \quad \text{δύο ρίζες}$$

$$A \checkmark \quad -3 \leq \kappa \leq -2 \quad \text{μία ρίζα}$$

$$A \checkmark \quad \kappa < -3 \quad \text{καμία ρίζα}$$

ΘΕΜΑ 2ο

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^4$ και $g(x) = 2 - x^2$. Τα σημεία A, B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g ενώ Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ, Δ, Ε.

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g και να το επαληθεύσετε αλγεβρικά.

γ) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι πάνω από τον xx' και να το επαληθεύσετε αλγεβρικά.

$$\beta) f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 < 0 \quad \text{Θετω } x^2 = w$$

$$w^2 + w - 2 < 0$$

w	-2	1
$w^2 + w - 2$	+	-

$$-2 < w < 1 \Leftrightarrow -2 < x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{1} \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$$

$$\delta) g(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{2} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

ΘΕΜΑ 3ο

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι εξίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$ και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{3} \cdot \eta\mu x$ και $g(x) = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β).

δ) Αξιοποιώντας το ερώτημα γ) να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x < 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

α) $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$ τότε $0^2 + 0^2 = 1$ Άρα
Συνεπώς δεν υπάρχει.

$$\beta) \sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 3 \sigma\upsilon\nu x \iff \frac{\sqrt{3} \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{3 \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x} \iff \sqrt{3} \epsilon\phi x = 3$$

* Αν $\sigma\upsilon\nu x = 0$ τότε $\sqrt{3} \eta\mu x = 0 \Rightarrow \eta\mu x = 0$ Άρα από το α)

$$\iff \epsilon\phi x = \frac{3}{\sqrt{3}} \iff \epsilon\phi x = \sqrt{3} \iff \epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{\pi}{3} \iff x = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

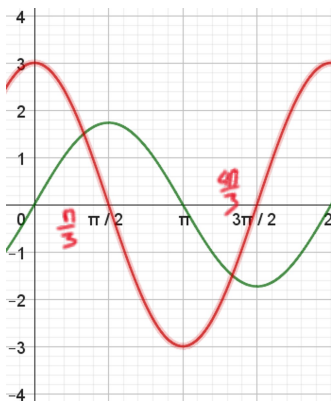
$$\text{Όμως } 0 \leq x \leq 2\pi \iff 0 \leq k\pi + \frac{\pi}{3} \leq 2\pi \iff$$

$$-\frac{\pi}{3} \leq k\pi \leq 2\pi - \frac{\pi}{3} \iff -\frac{\pi}{3} \leq k\pi \leq \frac{5\pi}{3} \iff$$

$$-\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{5}{3} \quad \text{Όμως } k \in \mathbb{Z} \text{ οπότε } k=0 \text{ ή } k=1$$

$$\text{για } k=0 : x = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{για } k=1 : x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$



$$\delta) \sqrt{3} \eta\mu x < 3 \sigma\upsilon\nu x \iff f(x) < g(x) \iff f \text{ κατω από } g \\ x \in [0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{4\pi}{3}, 2\pi]$$