

Μάθημα 30ο - Όρια στο άπειρο - πολυωνυμικές - ρητές - άρρητες

Θέμα 1ο Όρια πολυωνυμικών - ρητών συναρτήσεων

A) Να βρείτε τα παρακάτω όρια

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + 1)$ ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x + 1)$ iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 2x + 1)$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin 3 \cdot x^2 - 2x + 1)$ v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2-2x+1}$ vi. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-x-2}{x^2-x-1}$ vii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5-x-2}{x^2-x-1}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

Διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 1 - 0 + 0 = 1$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin 3 \cdot x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin 3 \cdot x^2) = -\infty$ Διότι $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$
 $\sin 3 < 0$

v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

vi) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-x-2}{x^2-x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$

vii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5-x-2}{x^2-x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

B) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda-2)x^3-x-2}{\lambda \cdot x^2-2x+1}$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

• Αν $\lambda \neq 2$ και $\lambda \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda-2)x^3-x-2}{\lambda x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda-2)x^3}{\lambda x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda-2}{\lambda} \cdot x\right) = \begin{cases} +\infty, & \frac{\lambda-2}{\lambda} > 0 \\ -\infty, & \frac{\lambda-2}{\lambda} < 0 \end{cases}$$

$\lambda \mid -\infty \quad 0 \quad 2 \quad +\infty$ $- \left\{ +\infty, \lambda < 0 \text{ ή } \lambda > 2 \right.$

λ	$-\infty$	0	2	$+\infty$
λ	$-$	0	$+$	$+$
$\lambda-2$	$-$	$-$	0	$+$
$p(\lambda)$	$+$	$-$	$+$	$+$

$$= \begin{cases} +\infty, & \lambda < 0 \text{ ή } \lambda > 2 \\ -\infty, & 0 < \lambda < 2 \end{cases}$$

- Ar $\lambda=2$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2x} = 0$
- Ar $\lambda=0$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3-x-2}{-2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3}{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

Γ) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-2)x^3 - (\alpha+\beta)x^2 - 2}{(\beta-1) \cdot x^2 - 2x + 1} = 2$

- Ar $\alpha \neq 2$ και $\beta \neq 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-2)x^3}{(\beta-1)x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-2)x}{\beta-1} = \begin{cases} +\infty, & \frac{\alpha-2}{\beta-1} > 0 \\ -\infty, & \frac{\alpha-2}{\beta-1} < 0 \end{cases}$

Σε κάθε περίπτωση είναι άτονο

- Ar $\alpha=2$ και $\beta=1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2-2}{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2} = +\infty$ Άτονο
- Ar $\alpha \neq 2$ και $\beta=1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-2)x^3}{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2-\alpha)x^2 = \begin{cases} +\infty, & \alpha < 2 \\ -\infty, & \alpha > 2 \end{cases}$ Άτονο
- Ar $\alpha=2$ και $\beta \neq 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-(2+\beta)x^2}{(\beta-1)x^2} = -\frac{(2+\beta)}{\beta-1}$ (Ar $\beta=-2$ το οποίο θα ήταν 0 Άτονο)

Πρέπει $\frac{-(2+\beta)}{\beta-1} = 2 \Leftrightarrow -2-\beta = 2\beta-2 \Leftrightarrow \boxed{\beta=0}$

Τελικά $\boxed{\alpha=2}$ και $\boxed{\beta=0}$

Θέμα 2ο Όρια άρρητων συναρτήσεων

A) Να βρείτε τα παρακάτω όρια

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 2x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 2x)$ iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 1} + x)$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 1} - x)$ v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$ vi. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$

vii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2} + x}{\sqrt{4x^2 - x - 1} - 2x}$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 2x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2x \right) \stackrel{x \rightarrow +\infty}{\underset{x > 0}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 \right) = -\infty \end{aligned}$$

2ος τρόπος $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x-1)^2} - 2x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (|x-1| - 2x) \stackrel{x \rightarrow +\infty}{\underset{x > 1}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1-2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$