Μάθημα 31ο - Όρια στο άπειρο - άρρητες

Θέμα 2ο Όρια άρρητων συναρτήσεων

Α) Να βρείτε τα παρακάτω όρια

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x+1}-2x)$ ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-2x+1}-2x)$ iii. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-2x+1}+x)$

iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x+1}-x)$ v. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2-2x+1}}$ vi. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

vii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x-2}+x}{\sqrt{4x^2-x-1}-2x}$

ii) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-2x\right)\quad \frac{x\to-\infty}{x<0}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-2\right)=+\infty$$

iii) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\right)\quad \frac{x\to-\infty}{x<0}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}x\cdot\left(-\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)$$

που είναι απροσδιόριστη μορφή $-\infty\cdot 0$

άρα δεν λύνεται όπως τα i), ii) και κάνω συζυγή

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2-2x+1}-x\right)}{\sqrt{x^2-2x+1}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+1-x^2}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+1}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}\quad \frac{x\to-\infty}{x<0}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+1}{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(-2+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)}=\frac{-2+0}{-2}=1$$

iv) $$\lim\left(\sqrt{x^2-2x+1}-x\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-2x+1}+x\right)}{}=$$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+1}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-2x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-2x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2-2x+1}+x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}-2x+1-\cancel{x^2}}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+x} \overset{x\to+\infty}{\underset{x>0}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(-2+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{-2}{2}=-1$$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2-2x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}} \overset{x\to+\infty}{\underset{x>0}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{\cancel{x}\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \dfrac{1}{1}=1$

vi) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2-2x+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}} \overset{x\to-\infty}{\underset{x<0}{=}} \lim\limits_{x\to}\dfrac{-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \dfrac{-1}{-1}=1$

vii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x-2}+x}{\sqrt{4x^2-x-1}-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+x\right)\left(\sqrt{4x^2-x-1}+2x\right)}{\cancel{4x^2}-x-1-\cancel{4x^2}} \overset{x\to+\infty}{\underset{x>0}{=}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)\left(|x|\sqrt{4-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+2x\right)}{\cancel{x}\left(-1-\frac{1}{x}\right)} = -\infty$$

Β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x+1}-\lambda x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\Re$

• $\lambda\neq 1$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-\lambda x\right) \overset{x\to+\infty}{\underset{x>0}{=}} \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-\lambda\right) = \begin{cases} +\infty, & 1-\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda<1 \\ -\infty, & 1-\lambda<0 \Leftrightarrow \lambda>1 \end{cases}$$

• $\lambda=1$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}-2x+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-2x+1}+x} \overset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(-2+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = -1$$

Γ) Να βρείτε τις τιμές των α,β $\in\Re$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x+1}-\alpha x+\beta)=3$

• $\alpha\neq 1$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-\alpha x+\beta\right) \overset{x\to+\infty}{\underset{x>0}{=}} \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-\alpha+\frac{\beta}{x}\right) = \begin{cases} +\infty, & 1-\alpha>0 \quad \alpha<1 \\ -\infty, & 1-\alpha<0 \quad \alpha>1 \end{cases}$$

Σε καθε περιπτωση Αδυνατο

• $\alpha=1$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+1}-x+\beta\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\cancel{x^2}-2x+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-2x+1}+x}+\beta\right) =$

• $a=1$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+1}-x+b\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\cancel{x^2}-2x+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-2x+1}+x}+b\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(-2+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}+b\right)=-1+b$$

Πρέπει $-1+b=3 \Rightarrow \boxed{b=4}$

Τελικά $\boxed{a=1}$ και $\boxed{b=4}$