Μάθημα 32ο - Όρια στο άπειρο - τριγωνομετρικά - λογαριθμικές

Θέμα 3ο Όρια τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Να βρείτε τα παρακάτω όρια

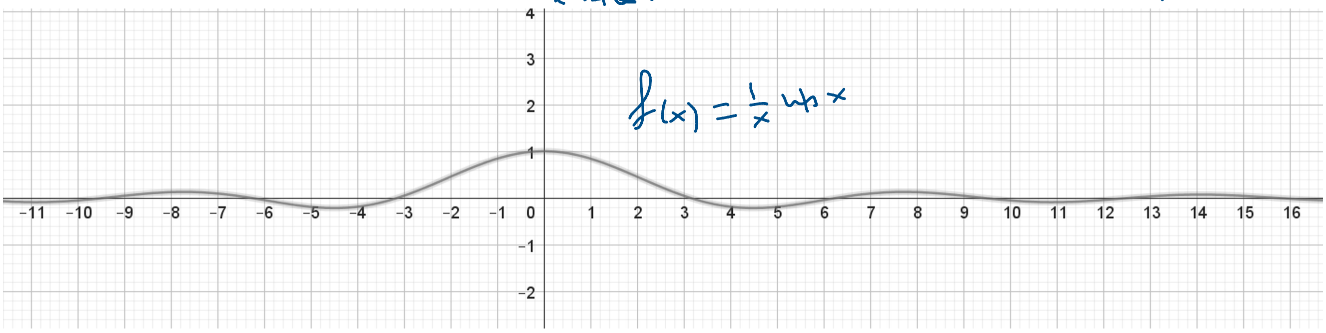
i. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}\cdot\eta\mu x)$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x})$ iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\nu}\cdot\eta\mu\frac{1}{x}),\nu\in\mathbb{N}^*$ iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\eta\mu x)$

v. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\eta\mu x)$ vi. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu^2 x-x\cdot\eta\mu x-2x^2}{2\eta\mu^2 x-3x\cdot\eta\mu x-4x^2}$ vii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2\cdot\eta\mu x}{x^3+1}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\eta\mu x\right)$

για $x\neq 0$: $|\eta\mu x|\le 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right||\eta\mu x|\le\left|\frac{1}{x}\right| \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\eta\mu x\right|\le\frac{1}{|x|} \Rightarrow -\frac{1}{|x|}\le\frac{1}{x}\eta\mu x\le\frac{1}{|x|}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}=0$ Άρα κρ. παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\eta\mu x\right)=0$



ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\overset{*}{=}\lim\limits_{u\to0^+}\frac{\eta\mu u}{u}=1$

* Θέτω $\frac{1}{x}=u$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ Άρα για $x\to+\infty$, $u\to 0$
οπότε $x=\frac{1}{u}$ και αφού $x\to+\infty$, $x>0$ άρα και $u>0$ $\Big\}$ $u\to0^+$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\nu}\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\nu-1}\cdot x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=+\infty$, αν $\nu>1$

$\nu\in\mathbb{N}^*=\{1,2,3,\dots\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\nu-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\,\eta\mu\frac{1}{x}=1$

Αν $\nu=1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=1$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\eta\mu x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{\eta\mu x}{x}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\eta\mu x\right)=0$

2ος τρόπος

$-1\le\eta\mu x\le 1$

$x-1\le x+\eta\mu x\le x+1$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\eta\mu x)=+\infty$

v) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\eta\mu x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(1+\frac{\eta\mu x}{x}\right)=-\infty$

v) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\eta\mu x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(1+\frac{\eta\mu x}{x}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\eta\mu x)=+\infty$

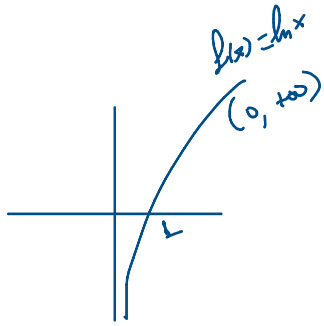
v) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$

οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\eta\mu x)=-\infty$

vi. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu^2x-x\cdot\eta\mu x-2x^2}{2\eta\mu^2x-3x\cdot\eta\mu x-4x^2}$ $\underset{x<0}{\overset{x\to-\infty}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{\eta\mu^2x}{x^2}-\frac{x\,\eta\mu x}{x^2}-\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{2\eta\mu^2x}{x^2}-\frac{3x\cdot\eta\mu x}{x^2}-\frac{4x^2}{x^2}}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2-\frac{\eta\mu x}{x}-2}{2\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2-3\frac{\eta\mu x}{x}-4}=\dfrac{0-0-2}{0-0-4}=\dfrac{1}{2}$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\cdot\eta\mu x}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2\eta\mu x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\eta\mu x}{x}}{1+\frac{1}{x^3}}=\dfrac{0}{1+0}=0$



$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$

Θέμα 5ο Όρια λογαριθμικών συναρτήσεων

Να βρείτε τα παρακάτω όρια

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln\dfrac{x}{x-1})$, β) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\ln\dfrac{-x}{x^2+1})$, γ) $\lim\limits_{x\to0}(\ln\dfrac{1-x}{x})$, δ) $\lim\limits_{x\to1}(\ln\dfrac{x}{x-1})$

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x^2-\ln(x^2+1))$ στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln(e^x+1))$ ζ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+\eta\mu x)$

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x}{x-1}=\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$

Θέτω $\dfrac{x}{x-1}=u$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\dfrac{-x}{x^2+1}=\lim\limits_{u\to0}\ln u=-\infty$

Θέτω $\dfrac{-x}{x^2+1}=u$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{1}{x}=0$

γ) $\lim\limits_{x\to0}\ln\dfrac{1-x}{x}=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$

Πρέπει $\dfrac{1-x}{x}>0\Rightarrow x\in(0,1)$ άρα $x\to0^+$

Θέτω $\frac{1-x}{x}=u$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)\frac{1}{x} = +\infty$

δ) $\lim\limits_{x\to 1}\ln\frac{x}{x-1} = \lim\limits_{u\to +\infty}\ln u = +\infty$

Πρέπει $\frac{x}{x-1}>0 \Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$, $x\to 1^+$

Θέτω $\frac{x}{x-1}=u$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x\,\frac{1}{x-1}\right) = +\infty$

ε) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln x^2 - \ln(x^2+1)\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\ln\frac{x^2}{x^2+1} = \lim\limits_{u\to 1}\ln u = 0$

Θέτω $\frac{x^2}{x^2+1}=u$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1$

στ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\ln(e^x+1)\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln e^x - \ln(e^x+1)\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\ln\frac{e^x}{e^x+1} =$

$= \lim\limits_{u\to 1}\ln u = 0$

Θέτω $\frac{e^x}{e^x+1}=u$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{1}{1+0} = 1$

ζ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln x + \text{ημ}x\right)$

$-1\le \text{ημ}x \le 1 \Rightarrow \ln x - 1 \le \ln x + \text{ημ}x \le \ln x + 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x - 1) = +\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x + \text{ημ}x) = +\infty$