

Μάθημα 33ο - Όρια στο άπειρο - εκθετικές - βοηθητική συνάρτηση

Θέμα 4^ο Όρια εκθετικών συναρτήσεων

Να βρείτε τα παρακάτω όρια

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$ ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$ iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{\pi}\right)^x$ iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{\pi}\right)^x$ v. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}$ vi. $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

vii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^x + 3^{x+1}}{3 \cdot 2^x + 3^x}\right)$ viii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2^x + 3^{x+1}}{3 \cdot 2^x + 3^x}\right)$ ix. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^x + a^{x+1}}{3 \cdot 2^x + a^x}\right)$ x. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2^x + a^{x+1}}{3 \cdot 2^x + a^x}\right), a > 0$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^x \stackrel{\frac{3}{\pi} < 1}{=} 0$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^x \stackrel{\frac{3}{\pi} < 1}{=} +\infty$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{\pi}\right)^x \stackrel{\frac{4}{\pi} > 1}{=} +\infty$

iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{\pi}\right)^x \stackrel{\frac{4}{\pi} > 1}{=} 0$

v) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{1}{x} = u}{\underset{u \rightarrow +\infty}{x \rightarrow 0^+}} \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$, vi) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{1}{x} = u}{\underset{u \rightarrow -\infty}{x \rightarrow 0^-}} \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$

vii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^{x+1}}{3 \cdot 2^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \left(\frac{2^x}{2^x} + \frac{3^{x+1}}{2^x}\right)}{3^x \left(3 \cdot \frac{2^x}{3^x} + \frac{3^x}{3^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3}{3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1} = \frac{0+3}{3 \cdot 0+1} = 3$

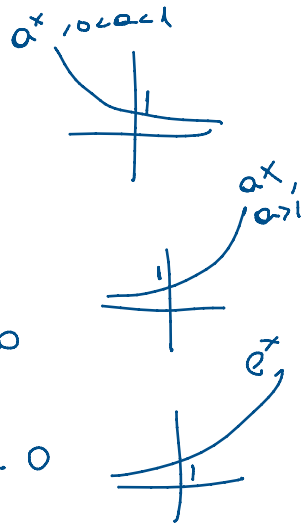
viii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 3^{x+1}}{3 \cdot 2^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x \left(\frac{2^x}{2^x} + 3 \cdot \frac{3^x}{2^x}\right)}{2^x \left(3 \cdot \frac{2^x}{2^x} + \frac{3^x}{2^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x}{3 + \left(\frac{3}{2}\right)^x} = \frac{1+3 \cdot 0}{3+0} = \frac{1}{3}$

ix) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + a^{x+1}}{3 \cdot 2^x + a^x}$

Av $a > 2$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \left(\frac{2^x}{a^x} + \frac{a^{x+1}}{a^x}\right)}{a^x \left(3 \cdot \frac{2^x}{a^x} + \frac{a^x}{a^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{a}\right)^x + a}{3 \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^x + 1} = \frac{0+a}{3 \cdot 0+1} = a$

Av $0 < a < 2$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \left(\frac{2^x}{2^x} + a \cdot \frac{a^x}{2^x}\right)}{2^x \left(3 \cdot \frac{2^x}{2^x} + \frac{a^x}{2^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + a \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^x}{3 + \left(\frac{a}{2}\right)^x} = \frac{1+a \cdot 0}{3+0} = \frac{1}{3}$

Av $a = 2$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 2^{x+1}}{3 \cdot 2^x + 2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x(1+2)}{2^x(3+1)} = \frac{3}{4}$



$$x) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + a^{x+1}}{3 \cdot 2^x + a^x}$$

$$\text{Av } 0 < a < 2 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{a^x} \left(\frac{2^x}{a^x} + \frac{a^{x+1}}{a^x} \right)}{\cancel{a^x} \left(3 \cdot \frac{2^x}{a^x} + \frac{a^x}{a^x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{a}\right)^x + a}{3 \left(\frac{2}{a}\right)^x + 1} = \frac{0+a}{3 \cdot 0 + 1} = a$$

$$\text{Av } a > 2 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \left(\frac{2^x}{2^x} + a \cdot \frac{a^x}{2^x} \right)}{2^x \left(3 \cdot \frac{2^x}{2^x} + \frac{a^x}{2^x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + a \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^x}{3 + \left(\frac{a}{2}\right)^x} = \frac{1+a \cdot 0}{3+0} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Av } a=2 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 2^{x+1}}{3 \cdot 2^x + 2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x (1+2)}{2^x (3+1)} = \frac{3}{4}$$

Θέμα 6^ο (Βοηθητική συνάρτηση)

A) Av $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 3x + 2}{xf(x) + x^2 - 2}$$

B) Av $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 3x) = 2$ να βρείτε το

$$\lambda \in \mathbb{R}^* \text{ ώστε να ισχύει ότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + \lambda x - 1}{xf(x) - 3x^2 + 1} = 1$$

A) Θεωρούμε $\frac{f(x)}{x} = g(x)$, $x > 0$ οπότε $f(x) = x \cdot g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot g(x)) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 3x + 2}{xf(x) + x^2 - 2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xg(x) + 3x + 2}{x^2g(x) + x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(g(x) + 3 + \frac{2}{x} \right)}{x^2 \left(g(x) + 1 - \frac{2}{x^2} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{g(x) + 3 + \frac{2}{x}}{g(x) + 1 - \frac{2}{x^2}} \right) = 0 \cdot \frac{3+3+0}{3+1-0} = 0 \end{aligned}$$

B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 3x) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + 2x - 1}{\dots} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(\frac{f(x)}{\cancel{x}} + 2 - \frac{1}{\cancel{x}} \right)}{\dots} = 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + 2x - 1}{x f(x) - 3x^2 + 1} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{f(x)} + 2 - \frac{1}{x}}{\cancel{x f(x)} - 3x + \frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow$$

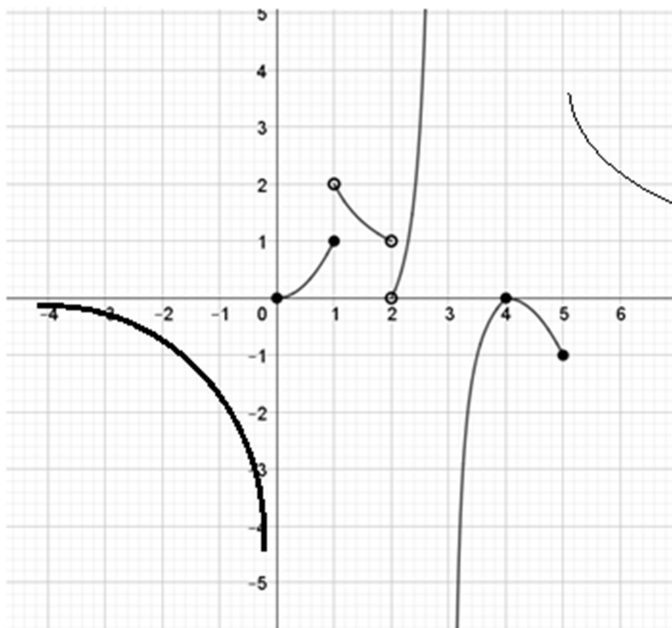
$$\frac{3 + 2 - 0}{2 \times 0} = 1 \Rightarrow 3 + 2 = 2 \Rightarrow \boxed{2 = -1}$$

Θέμα 7°

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Με βάση το παρακάτω σχήμα να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν και για όσα δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)}$ iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) - 1}$

v. $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x \cdot f(\frac{1}{x}))$ vi. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(f(x)))$ vii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(f(x)))$ viii. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{x - 5}$



i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

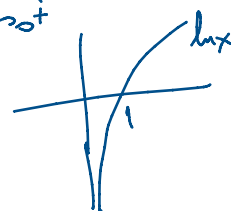
αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $f(x) < 0$ για $x \rightarrow -\infty$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) - 1} = +\infty$

αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1) = 0$, $f(x) > 1$ για $x \rightarrow +\infty$

v) $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x \cdot f(\frac{1}{x})) \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x \cdot f(\frac{1}{x})) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$



$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(\frac{1}{x}) \stackrel{\frac{1}{x} = u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = 1$

vi) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) = \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = -\infty$

$$vi) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) = \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = -\infty$$

DETW $f(x)=u$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ kan $f(u) < 0$ onzic $u \rightarrow -\infty$

$$vii) \lim_{x \rightarrow 0} f(f(x)) = \lim_{u \rightarrow 1^+} f(u) = 2$$

DETW $f(x)=u$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ kan $f(x) > 1$ onzic $u \rightarrow 1^+$

$$viii) \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{f(x)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \left(f(x) \frac{1}{x-5} \right) = +\infty \quad \text{upei} \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{x-5} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{f(x)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \left(f(x) \frac{1}{x-5} \right) = +\infty \quad \text{upei} \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{x-5} = -\infty$$

$$\text{'Ape} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{x-5} = +\infty$$