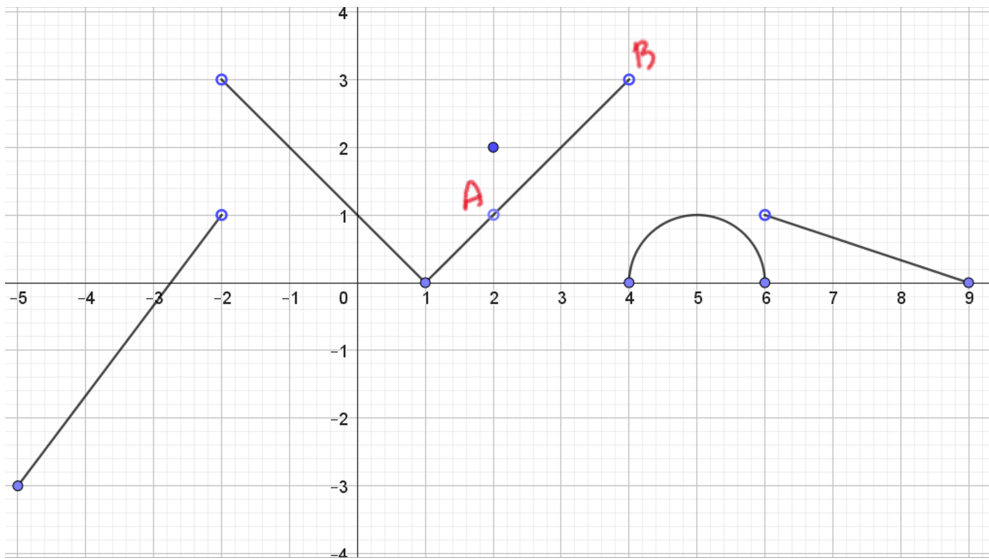


Μάθημα 34ο - Συνέχεια συνάρτησης

Θέμα 1ο (έλεγχος συνέχειας και εύρεση σημείων ασυνέχειας από σχήμα)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: [-5, -2) \cup (-2, 9] \rightarrow \mathbb{R}$.



α) Να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας.

το 2 διότι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2) = 2$
 το 4 διότι το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ δεν υπάρχει
 το 6 διότι το $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ δεν υπάρχει

β) Να χαρακτηρίσετε με Σ - Λ τις παρακάτω προτάσεις

1. Η f είναι ασυνεχής στο -2. $\wedge$ διότι $-2 \notin Df$
2. Η f είναι συνεχής στο $[4, 6]$. Σ
3. Η f είναι συνεχής στο $(-2, 1]$. Σ
4. Η f είναι συνεχής στο $[2, 4)$. $\wedge$
5. Η f είναι συνεχής στο $[6, 9]$. $\wedge$
6. Η f είναι συνεχής στο $[1, 2)$. Σ
7. Η f είναι συνεχής στο $[-5, -2)$. Σ

8. $\lim_{h \rightarrow 0} f(2+h) = f(2)$. $\wedge$ 8) $\lim_{h \rightarrow 0} f(2+h) \xrightarrow[h \rightarrow 2]{2+h=u} \lim_{u \rightarrow 2} f(u) = 1 \neq f(2) = 2$

9. $\lim_{h \rightarrow 1} f\left(\frac{6}{h}\right) = f(6)$. $\wedge$

9) $\lim_{h \rightarrow 1} f\left(\frac{6}{h}\right) \xrightarrow[h \rightarrow 1]{\frac{6}{h}=u} \lim_{u \rightarrow 6} f(u)$ δεν υπάρχει

10. $\lim_{x \rightarrow e} f(x) = e-1$. Σ

10) $\lim_{x \rightarrow e} f(x) \xrightarrow{f \text{ συνεχής } (2,4)} f(e) = e-1$ διότι
 η $f(x)$ για $x \in (2, 4)$
 έγκειται τω AB ταυτίζεται με

$$x \rightarrow 2 \quad \text{η } f(x) \text{ για } x \in (2, 4) \\ \text{Εύρεση της } AB \quad \text{Ταυτίζεται με} \\ \text{στην } AB: y = x - 1 \\ \lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 1}{4 - 2} = \frac{2}{2} = 1 \\ AB: y - y_A = \lambda_{AB}(x - x_A) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 1$$

Θέμα 2ο Έλεγχος συνέχειας σε συναρτήσεις πολλαπλού τύπου

Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \frac{\eta \mu x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}, \beta) g(x) = \begin{cases} x+1 & , x < -1 \\ x-1 & , -1 \leq x < 2 \\ x^2 - 2 & , x \geq 2 \end{cases}, \gamma) h(x) = \begin{cases} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} & , x < 0 \\ x+1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

α) $D_f = \mathbb{R}$

f συνεχής στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ως ημίως συνεχών } f συνεχής στο $\mathbb{R}$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1 = f(0) \rightarrow f$ συνεχής στο 0

β) $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$

f συνεχής στο $(-\infty, -1)$ ως πολυωνυμική

f συνεχής στο $(-1, 2)$ ως πολυωνυμική

f συνεχής στο $(2, +\infty)$ ως πολυωνυμική

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x-1) = -2$$

} $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ δεν υπάρχει οπότε f ασυνεχής στο -1

Τελικά f συνεχής στο $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$

Ερώτηση Είναι η f συνεχής στο $[-1, 2)$;

Απάντηση f συνεχής στο $(-1, 2)$ } $\Rightarrow f$ συνεχής στο $[-1, 2)$
 και $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x-1) = -2 = f(-1)$

$$\delta) D_f = \mathbb{R}$$

f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως ημιτικό συνεχώς

f συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως ημιαντισυνεχώς

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - 1}{x} = 0 \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)} \right\} \Rightarrow \text{το } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ δεν υπάρχει γιατί η } f \text{ ασυνεχώς στο } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1 \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{ γιατί } f \text{ συνεχής } [0, +\infty)$$

$$f(0) = 1$$

Τελικά f συνεχής στο $\mathbb{R} - \{0\}$

Θέμα 3ο Εύρεση παραμέτρων ώστε μια συνάρτηση να είναι συνεχής

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο 1 όταν :

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \alpha x - \beta & , x < 1 \\ 3 & , x = 1 \\ \beta x^2 + 2\alpha & , x > 1 \end{cases} \quad , \quad \beta) f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 - \beta}{x-1} & , x \neq 1 \\ 4 & , x = 1 \end{cases}$$

$$a) f \text{ συνεχής στο } 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow$$

$$\alpha - \beta = \beta + 2\alpha = 3 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 3 \\ \beta + 2\alpha = 3 \end{cases} \xrightarrow{+} 3\alpha = 3 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1} \text{ και } \boxed{\beta = -2}$$

$$b) f \text{ συνεχής στο } 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 4$$

$$\gamma \text{ για } x \neq 1 \text{ είναι } f(x) = \frac{\alpha x^2 - \beta}{x-1} \Rightarrow (x-1)f(x) = \alpha x^2 - \beta \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} ((x-1)f(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} (\alpha x^2 - \beta) \Rightarrow 0 \cdot 4 = \alpha - \beta \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta}$$

$$\text{ποσο } f(x) = \frac{\alpha x^2 - \alpha}{x-1} = \frac{\alpha(x^2 - 1)}{x-1} = \frac{\alpha(x+1)(x-1)}{x-1} = \alpha(x+1)$$

Summary $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} a(x+1) = 4 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow \boxed{a=2}$ and $\boxed{b=2}$