

Μάθημα 35ο - Συνέχεια συνάρτησης συνέχεια

Θέμα 4^ο Έλεγχος συνέχειας σε σημείο του πεδίου ορισμού

A) Μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ισχύει $(x-1)^2 f(x) + 2x - 3 = 0$ για κάθε $x \neq 1$. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο 1.

$1 \in D_f$
 Για $x \neq 1$ είναι $(x-1)^2 f(x) + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 f(x) = 3 - 2x \Rightarrow$

$$f(x) = \frac{3-2x}{(x-1)^2} \quad \text{οπότε} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3-2x) \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3-2x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

 Αφού $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ η f είναι ασυνεχής στο 1.

B) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(x) - 2x| \leq (x-1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1.

A.v.s.o. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$
 Για $x=1$: $|f(1) - 2 \cdot 1| \leq (1-1)^2 \Leftrightarrow |f(1) - 2| \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{f(1) = 2}$
 $|f(x) - 2x| \leq (x-1)^2 \Rightarrow -(x-1)^2 \leq f(x) - 2x \leq (x-1)^2 \Rightarrow$

$$2x - (x-1)^2 \leq f(x) \leq (x-1)^2 + 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x - (x-1)^2) = 2 - 0 = 2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{κρίσιμα} \\ \text{παραδείγματα} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + (x-1)^2) = 2 + 0 = 2$$

 Άρα f συνεχής στο 1.

Θέμα 5^ο Εύρεση τιμής συνάρτησης από όριο μέσω συνέχειας

A) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο 0 και ισχύει $xf(x) = \sin x - 1$ για κάθε $x \neq 0$. Να βρείτε το $f(0)$.

Αφού f συνεχής στο 0 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$
 Για $x \neq 0$: $f(x) = \frac{\sin x - 1}{x}$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$
 Συνεχώς $\boxed{f(0) = 0}$

B) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο 0 τέτοια ώστε: $|xf(x) - \eta\mu x| \leq x^2$, για κάθε

$x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(0)$.

Αφού f συνεχής στο 0 $\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)}$

$$|xf(x) - \eta\mu x| \leq x^2 \Rightarrow -x^2 \leq xf(x) - \eta\mu x \leq x^2 \Rightarrow \eta\mu x - x^2 \leq xf(x) \leq x^2 + \eta\mu x$$

Για $x > 0$: $\frac{\eta\mu x}{x} - x \leq f(x) \leq x + \frac{\eta\mu x}{x}$

και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} - x \right) = 1 - 0 = 1$ $\left. \begin{array}{l} \text{κρίσιμα} \\ \text{αποφασιστικά} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + x \right) = 1 + 0 = 1$

Αφού f συνεχής στο 0 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$

οποσο τελικά $\boxed{f(0) = 1}$

Γ) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο 0 και ισχύει

$xf(x) < \sin x - 1$ για κάθε $x \neq 0$. Να βρείτε το $f(0)$.

Αφού f συνεχής στο 0 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

για $x > 0$: $f(x) < \frac{\sin x - 1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} \Rightarrow \boxed{f(0) \leq 0} \quad (1)$

για $x < 0$: $f(x) > \frac{\sin x - 1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - 1}{x} \Rightarrow \boxed{f(0) \geq 0} \quad (2)$

Από (1), (2) $\Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$

Θέμα 6ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε : $x \cdot f(x) + \eta\mu x = 2023 \cdot x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(0) = 2022$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2022$.

$$\alpha) \quad x f(x) + \eta\mu x = 2023x \Rightarrow x f(x) = 2023x - \eta\mu x$$

$$\text{για } x \neq 0 : f(x) = 2023 - \frac{\eta\mu x}{x} \quad \text{οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2023 - \frac{\eta\mu x}{x} \right) \xrightarrow[\text{συνεχ.}]{\text{συν.}} f(0) = 2023 - 1 \Rightarrow \boxed{f(0) = 2022}$$

$$\beta) \quad f(x) = \begin{cases} 2023 - \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 2022, & x = 0 \end{cases}$$

γ) $f(x) = 2022$ οπότε το 0 είναι μια λύση της εξίσωσης

$$\text{για } x \neq 0 : f(x) = 2022 \Leftrightarrow 2023 - \frac{\eta\mu x}{x} = 2022 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = x \quad \begin{matrix} \text{αδυνατόν} \\ \text{για } x \neq 0 \end{matrix}$$

Τελικά μοναδική λύση η $x = 0$

Θέμα 7ο

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^2(x) - 4xf(x) = x^4 - 4x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η οποία είναι συνεχής στο 0. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι

$$\alpha) \lambda = 2 \quad \beta) f(0) = 0 \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu f(x) - x}{x - f(x)} = -1 \quad \delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - 2x|}{x^2 + f^2(x)} = \frac{1}{5}$$

$$\alpha) \text{ για } x \neq 0 : \frac{f^2(x)}{x^2} - \frac{4xf(x)}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} - \frac{4x^2}{x^2} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x} \right)^2 - 4 \frac{f(x)}{x} = x^2 - 4 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{f(x)}{x} \right)^2 - 4 \frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 4) \Rightarrow 2^2 - 4 \cdot 2 = -4 \Rightarrow 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0 \Rightarrow (2 - 2)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{2 = 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{f(x)}{x} \right) - 4 \cdot \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} - 4 \right)$$

$$\Rightarrow (2-2)^2 = 0$$

$$\boxed{2=2}$$

β) f συνεχής στο 0 $\Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} \cdot x \right) = 2 \cdot 0 = 0$
Άρα $f(0) = 0$

2ος κανόνας για $x=0$: $f^2(x) - 0 = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - x}{x - f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{xf(x)}{f(x)} - \frac{x}{f(x)}}{\frac{x}{f(x)} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{f(x)} \stackrel{f(x) \neq 0}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u \cdot 1}{1} = 1$$

δ) $f^2(x) - 4xf(x) = x^4 - 4x^2 \Leftrightarrow f^2(x) - 4xf(x) + 4x^2 = x^4 \Leftrightarrow (f(x) - 2x)^2 = x^4 \Rightarrow$

$$|f(x) - 2x| = x^2 \quad (1)$$

οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - 2x|}{x^2 + f^2(x)} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + f^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{f^2(x)}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+2^2} = \frac{1}{5}$