

Μάθημα 36ο - Θέμα για επανάληψη στα όρια

Θέμα

Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{x-1} = 2$

A) Να δείξετε ότι $P(1) = 0$

Θετω $g(x) = \frac{P(x)}{x-1}$, $x \neq 1$ οπότε $P(x) = g(x) \cdot (x-1)$, $x \neq 1$

και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} P(x) \stackrel{x \neq 1}{=} \lim_{x \rightarrow 1} (g(x)(x-1)) = 2 \cdot 0 = 0$$

2ος τρόπος
 $\lim_{x \rightarrow 1} P(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{x-1} (x-1) = 2 \cdot 0 = 0$

και επειδή $P(x)$ συνεχής ως πολυώνυμο

$$P(1) = \lim_{x \rightarrow 1} P(x) = 0$$

B) Να αποδείξετε ότι $P(x) < 0$ για $x \rightarrow 1^-$ και $P(x) > 0$ για $x \rightarrow 1^+$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{P(x)}{x-1} = 2 > 0 \xrightarrow[\text{διότιμα}]{\text{ορίο}} \frac{P(x)}{x-1} > 0, \text{ για } x \rightarrow 1^+ \text{ και επειδή } x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x-1 > 0$$

Είναι $P(x) > 0$ για $x \rightarrow 1^+$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{P(x)}{x-1} = 2 > 0 \Rightarrow \frac{P(x)}{x-1} > 0, \text{ για } x \rightarrow 1^- \text{ και επειδή } x \rightarrow 1^- \Rightarrow x-1 < 0$$

Είναι $P(x) < 0$, για $x \rightarrow 1^-$

Γ) Να βρείτε τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 1} (P(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{x-1}) = 0$ Διότι

$$|\eta\mu \frac{1}{x-1}| \leq 1 \Rightarrow |P(x)| |\eta\mu \frac{1}{x-1}| \leq |P(x)| \Rightarrow -|P(x)| \leq P(x) \leq |P(x)|$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} |P(x)| = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1} (-|P(x)|) = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{παράλειψη}]{\text{κρίσιμα}} \lim_{x \rightarrow 1} P(x) \eta\mu \frac{1}{x-1} = 0$$

$$D(x) \quad 0 \quad \frac{P(x)}{x-1} \quad \neq \quad 2 \quad \cdot$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{\eta \mu(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{P(x)}{x-1}}{\frac{\eta \mu(x-1)}{x-1}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$* \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta \mu(x-1)}{x-1} \stackrel{x \rightarrow 1}{\underset{u \rightarrow 0}{=}} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta \mu u}{u} = 1$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{\frac{x}{\pi} - \eta \mu \frac{x}{\pi}} = \frac{P(1)}{\frac{1}{\pi} - \eta \mu \frac{1}{\pi}} = \frac{0}{\frac{1}{\pi} - \eta \mu \frac{1}{\pi}} = 0 \quad \text{δωτι } \frac{1}{\pi} - \eta \mu \frac{1}{\pi} \neq 0$$

$$\text{δωτι } \eta \mu x = x \Leftrightarrow x = 0 \\ \text{και } \frac{1}{\pi} \neq 0$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1-x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\ln(1-x) \cdot \frac{1}{P(x)} \right) = +\infty \quad \text{δωτι}$$

$$\text{πρέπει } 1-x > 0 \rightarrow x < 1 \quad \text{οπότε } x \rightarrow 1^- \\ \lim_{x \rightarrow 1} \ln(1-x) \stackrel{1-x=u}{\underset{u \rightarrow 0}{=}} \lim_{u \rightarrow 0} \ln u = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{P(x)} = -\infty$$

$$P(x) < 0, \text{ για } x \rightarrow 1^- \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} P(x) = 0$$

Δ) Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\frac{f(x)}{P(x)} < 1$ για $x \rightarrow 1$ και

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ .

$$\text{για } x \rightarrow 1^+, P(x) > 0 \quad \text{οπότε } f(x) < P(x) \implies \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 1^+} P(x) \Rightarrow \boxed{\lambda \leq 0} \quad (1)$$

$$\text{για } x \rightarrow 1^-, P(x) < 0 \quad \text{οπότε } f(x) > P(x) \implies \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 1^-} P(x) \Rightarrow \boxed{\lambda \geq 0} \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2) } \Rightarrow \boxed{\lambda = 0}$$

Ε) Αν επιπλέον $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x^2 + x - 1} = -1$ τότε :

ι) να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

$$\text{Αν βαθμός } P(x) = r \geq 3 \\ \text{και } P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ a \neq 0$$

$$\text{τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax < \begin{matrix} -\infty \\ \text{αν } a < 0 \\ +\infty \\ \text{αν } a > 0 \end{matrix}$$

$$\text{Αρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x^2 + x - 1} = 0$$

$$n \times y(x) = 0x^2 + 2x + 0x + 0$$

$$a \neq 0$$

Av. λαμβάνω $P(x) = 1$, $y(x) = ax + b$ οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x} = 0$ Άρα

Αρα λαμβάνω $P(x) = 2$, $P(x) = ax^2 + bx + \gamma$ οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x^2 + x - 1} = 1 \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{x^2} = -1 \Rightarrow a = -1$$

$$\text{Αρα } P(x) = -x^2 + bx + \gamma$$

$$\bullet P(1) = 0 \Rightarrow -1 + b + \gamma = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma = 1 - b}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{x-1} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + bx + \gamma}{x-1} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + bx + 1 - b}{x-1} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{b(x-1) - (x-1)(x+1)}{x-1} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (b - x - 1) = 2 \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

$$\text{οπότε } \boxed{\gamma = -3}$$

$$\text{Τελικά } y(x) = -x^2 + 4x - 3$$

ii) να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{P(x)}{\eta \mu x + x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(P(x) \cdot \frac{1}{\eta \mu x + x - \pi} \right) = +\infty$ διότι

$$P(\pi) = -\pi^2 + 4\pi - 3 < 0$$

$$|\eta \mu x| \leq |x|$$

x	1	3	π
$P(x)$	-	+	-

$$\text{για } x \text{ το } \pi - x \in x$$

$$|\eta \mu(\pi - x)| \leq |\pi - x|$$

$$|\eta \mu x| \leq |\pi - x|$$

$$\text{για } x \rightarrow \pi^-, \pi - x > 0, \eta \mu x > 0$$

$$\text{οπότε } \eta \mu x < \pi - x \Rightarrow$$

$$\eta \mu x + x - \pi < 0$$

$$\text{να } \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1}{\eta \mu x + x - \pi} = -\infty$$