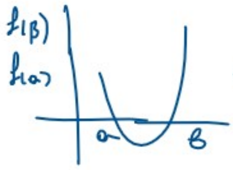
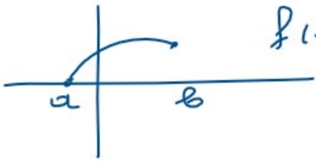
Μάθημα 37ο - Θεώρημα Bolzano

Θέμα 1ο Ερωτήσεις Σ – Λ



$f(\alpha)f(\beta)>0$

1. Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ με $f(x_o)=0$ τότε είναι απαραίτητα $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$. Λ
2. Αν για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $[\alpha,\beta]$ ισχύει ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ και $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Σ
3. Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\cdot f(\beta)\leq 0$ τότε υπάρχει $x_o\in[\alpha,\beta]$ με $f(x_o)=0$. Σ
4. Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$ τότε $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Λ
5. Αν f συνεχής στο $(\alpha,\beta]$, $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε $\lim_{x\to\alpha} f(x)\neq f(\alpha)$. Σ
6. Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$. Λ $f(\alpha)\cdot f(\beta)\geq 0$



$f(\alpha)\cdot f(\beta)=0$

Θέμα 2ο

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x - x + 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0,\pi)$.

Θεωρώ $f(x)=\eta\mu x - x + 1$, $x\in\mathbb{R}$

f συνεχής στο $[0,\pi]$ ως πράξεις συνεχών

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=1>0 \\ f(\pi)=-\pi+1<0 \end{array}\right\} f(0)\cdot f(\pi)<0$$

Από Θ. Bolzano για την f στο $[0,\pi]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,\pi)$ με $f(x_0)=0 \Rightarrow$

$\eta\mu x_0 - x_0 + 1 = 0$

Θέμα 3ο

Να αποδείξετε ότι η $f(x)=x^4+x-1$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-1<0 \\ f(1)=1>0 \end{array}\right\} f(0)f(1)<0$$

Από Θ. Bolzano για την f στο $[0,1]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ με $f(x_0)=0 \Longleftrightarrow x_0^4+x_0-1=0$

Θέμα 4ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\Re$ με $f(1) > 1, f(0) < -1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^4 + x - 1$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο $(0,1)$.

Θεωρώ $g(x) = f(x) - x^4 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

g συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών

$g(0) = f(0) + 1 < 0$ αφού $f(0) < -1$ από υπόθεση

$g(1) = f(1) - 1 > 0$ αφού $f(1) > 1$ από υπόθεση

Συνεπώς $g(0) \cdot g(1) < 0$ οπότε από Θ. Bolzano για τη g στο $[0,1]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ με $g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0^4 + x_0 - 1$

Θέμα 5ο

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha(x-\mu)(x-\nu) + \beta(x-\lambda)(x-\nu) + \gamma(x-\lambda)(x-\mu) = 0$ όπου $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$ έχει ακριβώς δύο ρίζες άνισες στο (λ, ν).

Θεωρώ $f(x) = \alpha(x-\mu)(x-\nu) + \beta(x-\lambda)(x-\nu) + \gamma(x-\lambda)(x-\mu)$

f συνεχής ως πολυωνυμική

$f(\lambda) = \alpha(\lambda-\mu)(\lambda-\nu) > 0$
$+ \quad - \quad -$

$f(\mu) = \beta(\mu-\lambda)(\mu-\nu) < 0$
$+ \quad + \quad -$

$f(\nu) = \gamma(\nu-\lambda)(\nu-\mu) > 0$
$+ \quad + \quad +$

Από Θ. Bolzano για την f στο $[\lambda,\mu]$, $[\mu,\nu]$ υπάρχουν $x_1 \in (\lambda,\mu)$, $x_2 \in (\mu,\nu)$ με $f(x_1) = f(x_2) = 0$ και επειδή η f είναι πολυωνυμική 2ου βαθμού, δεν μπορεί να έχει περισσότερες από 2 ρίζες, οπότε οι ρίζες x_1, x_2 είναι μοναδικές

Θέμα 6ο

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{e^x}{x-1} + \dfrac{\ln x}{x-2} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

Η εξίσωση $\dfrac{e^x}{x-1} + \dfrac{\ln x}{x-2} = 0$ με $x \neq 1$ και $x \neq 2$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $(x-2)e^x + (x-1)\ln x = 0$

Θεωρώ $f(x)=(x-2)e^x+(x-1)\ln x$, $x\in[1,2]$

f συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών

$f(1)=-e<0$, $f(2)=\ln 2>0$ Από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(1,2)$ με

$f(x_0)=0 \Leftrightarrow (x_0-2)e^{x_0}+(x_0-1)\ln x_0=0 \xLeftrightarrow[x_0\neq 2]{x_0\neq 1}$

$$\frac{e^{x_0}}{x_0-1}+\frac{\ln x_0}{x_0-2}=0$$

Θέμα 7ο

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\frac{1}{x}$ έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

Α.ν.δ.ο. η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει ακριβώς μια λύση

Θεωρώ $h(x)=f(x)-g(x)=\ln x-\frac{1}{x}$, $x>0$

h συνεχής ως πράξεις συνεχών

Ύπαρξη: $h(1)=\ln 1-1=-1<0$, $h(e)=\ln e-\frac{1}{e}=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}>0$ Από Θ. Bolzano στο $[1,e]$ υπάρχει $x_0\in(1,e)$ με $h(x_0)=0 \Rightarrow f(x_0)=g(x_0)$

Μοναδικότητα: για κάθε $x_1,x_2>0$ με $x_1<x_2 \Rightarrow \begin{cases}\ln x_1<\ln x_2\\ \frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases}\ln x_1<\ln x_2\\ -\frac{1}{x_1}<-\frac{1}{x_2}\end{cases} \xRightarrow{(+)} \ln x_1-\frac{1}{x_1}<\ln x_2-\frac{1}{x_2} \Rightarrow h(x_1)<h(x_2) \Rightarrow$

$h\uparrow(0,+\infty)$

οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική