

Μάθημα 38ο - Θεώρημα Bolzano

Θέμα 8ο

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $2x_0 \ln \frac{1}{x_0} = 1$.

$$f(x) = 2x \cdot \ln \frac{1}{x} - 1 \quad \text{, συνεχής, στο } (0, +\infty)$$

1ο πρόβλημα / $f(\frac{1}{n}) = 2 \cdot \frac{1}{n} \ln n - 1 = -1 < 0$

$$f(\frac{2}{n}) = 2 \cdot \frac{2}{n} \ln \frac{n}{2} - 1 = \frac{4}{n} - 1 = \frac{4-n}{n} > 0$$

Από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \subset (0, +\infty)$ με $f(x_0) = 0$
 $\Leftrightarrow 2x_0 \ln \frac{1}{x_0} = 1$

2ο πρόβλημα / $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x \cdot \ln \frac{1}{x} - 1) = 0 - 1 = -1 < 0 \xrightarrow[\text{δυνατό]}{\text{ορίο}} f(x) < 0, \text{ για } x \rightarrow 0^+$
 οπότε υπάρχει $\delta \rightarrow 0^+$ με $f(\delta) < 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x \cdot \ln \frac{1}{x} - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 > 0 \xrightarrow[\text{δυνατό]}{\text{ορίο}} f(x) > 0, \text{ για } x \rightarrow +\infty$
 οπότε υπάρχει $\delta \rightarrow +\infty$ με $f(\delta) > 0$

Από Θ. Bolzano για την f στο $[\delta, \delta]$ υπάρχει $x_0 \in (\delta, \delta) \subset (0, +\infty)$
 με $f(x_0) = 0 \Rightarrow 2x_0 \ln \frac{1}{x_0} = 1$

Θέμα 9ο

Να αποδείξετε ότι η $f(x) = x^3 + kx + \lambda$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

f συνεχής ως πολυωνυμική

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \Rightarrow f(x) > 0, \text{ για } x \rightarrow +\infty \Rightarrow \text{υπάρχει } \delta > 0, \delta \rightarrow +\infty$
 με $f(\delta) > 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \Rightarrow f(x) < 0, \text{ για } x \rightarrow -\infty \Rightarrow \text{υπάρχει } \delta < 0, \delta \rightarrow -\infty$
 με $f(\delta) < 0$

Από Θ. Bolzano για την f στο $[\delta, \delta]$ υπάρχει $x_0 \in (\delta, \delta) \subset \mathbb{R}$
 με $f(x_0) = 0$

Σημείωση: Κάθε πολυωνυμική επίσημη συνάρτηση περιέχει βαθμιά

Σύμβαση: Κάθε παθολογική ερώτηση ή συνάρτηση περιγράφεται
έχει μια τωδολογία πραγματική ρίζα

Θέμα 10°

Αν f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$ για τις οποίες ισχύει

$f(a) + f(b) = g(a) + g(b)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε

$f(\xi) = g(\xi)$.

$$f(a) + f(b) = g(a) + g(b)$$

$$f(a) - g(a) = g(b) - f(b) \quad (1)$$

Θεωρώ $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [a, b]$

h συνεχής στο $[a, b]$ ως διαφορά συνεχών.

$$\left. \begin{array}{l} h(a) = f(a) - g(a) \\ h(b) = f(b) - g(b) \end{array} \right\} \Rightarrow h(a) \cdot h(b) = (f(a) - g(a))(f(b) - g(b)) \stackrel{(1)}{=} \\ = (g(a) - f(a))(f(b) - g(b)) = \\ = -(f(b) - g(b))^2 \leq 0$$

1) Αν $h(a) \cdot h(b) < 0$ τότε από Θ.Β.Β.ζαννι υπάρχει $\xi \in (a, b)$
μτ $h(\xi) = 0$

2) Αν $h(a) \cdot h(b) = 0$ τότε $h(a) = 0$ ή $h(b) = 0$

$\xi \in$ καθε περίπτωση υπάρχει $\xi \in [a, b]$ μτ $h(\xi) = 0 \Rightarrow$
 $f(\xi) = g(\xi)$