

Μάθημα 40ο - Συνέπειες του Θεώρημα Bolzano

Θέμα 3ο

Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = x^4 - 9x^2$, $x \in \mathbb{R}$

β) $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, 2\pi]$

α) $f(x) = 0$

$$x^4 - 9x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 9) = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 3 \text{ ή } x = -3$$

Διαισθητικά

Με υ2-1 Λογισμικό

Με υ2-1 Β' Λογισμικό

x	-∞	-3	0	3	+∞
x^2	+	+	+	+	+
$x^2 - 9$	+	0	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	0	+

x	-∞	-3	0	3	+∞
επιλεγμένη τιμή	$f(-4) = 100$	$f(-1) = -8$	$f(1) = -8$	$f(4) = 100$	
$f(x)$	+	-	-	+	

+	0	-	0	-	0	+
-3		0		3		

ii) $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, 2\pi]$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x$$

Αν $\sigma\upsilon\nu x = 0$ τότε $\eta\mu x = 0$ Άρα

Αρα $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ οπότε $\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -1$

$$x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$0 \leq x \leq 2\pi$$

$$0 \leq \kappa\pi - \frac{\pi}{4} \leq 2\pi$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \kappa\pi \leq \frac{9\pi}{4}$$

$$\frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{9}{4}$$

$$\kappa = 1, \kappa = 2$$

για $\kappa = 1$, $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

για $\kappa = 2$, $x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

Διατηρή πρόσημο σε καθένα από τα $[0, \frac{3\pi}{4})$, $(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$, $(\frac{7\pi}{4}, 2\pi]$

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
επιλεγμένη τιμή	$f(0) = 1$	$f(\frac{3\pi}{4}) = -1$	$f(\frac{7\pi}{4}) = 1$	
$f(x)$	+	-	+	

Θέμα 4°

Εστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) = 1 + x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f ;

γ) Αν επιπλέον $f(0) = 1$ να βρείτε τον τύπο της f .

α) f συνεχής στο $\mathbb{R}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \text{ Αδύνατο}$$

Αρα $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και αφού είναι συνεχής διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ (ή $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

$$\beta) f^2(x) = 1 + x^2 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{1 + x^2} \quad (1)$$

$$\text{Αν } f(x) > 0, x \in \mathbb{R} \quad \text{τοτε } (1) \Rightarrow f(x) = \sqrt{1 + x^2}, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Αν } f(x) < 0, x \in \mathbb{R} \quad \text{τοτε } (1) \Rightarrow -f(x) = \sqrt{1 + x^2} \Rightarrow f(x) = -\sqrt{1 + x^2}, x \in \mathbb{R}$$

$$\gamma) \text{ Αφού } f(0) = 1 > 0 \text{ οπότε } f(x) > 0, x \in \mathbb{R} \text{ οπότε } f(x) = \sqrt{1 + x^2}, x \in \mathbb{R}$$

Θέμα 5°

Εστω συνάρτηση f συνεχής στο $[-1, 1]$ για την οποία ισχύει $x^2 + f^2(x) = 1$ για $x \in [-1, 1]$.

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει διατηρεί πρόσημο στο $(-1, 1)$.

γ) Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f και ποια η γραφική της παράσταση;

δ) Αν επιπλέον $f(0) = -1$ να βρείτε τον τύπο της f .

$$\alpha) f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

β) $f(x) \neq 0, x \in (-1, 1)$ και αφού είναι συνεχής, διατηρεί πρόσημο στο $(-1, 1)$ δηλαδή $f(x) > 0, x \in (-1, 1)$ ή $f(x) < 0, x \in (-1, 1)$

$$\gamma) \text{ Αν } f(x) > 0, x \in (-1, 1) \text{ δηλαδή } f(x) \geq 0, x \in [-1, 1], \text{ τότε } f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

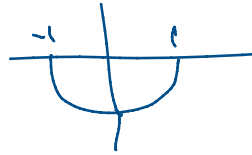
$$\text{Αν } f(x) < 0, x \in (-1, 1) \text{ δηλαδή } f(x) \leq 0, x \in [-1, 1]$$

$$\text{τοτε } f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$



$$f^2(x) = 1 - x^2$$

$$\text{τοτε } f(x) = -\sqrt{1-x^2}$$



$$\text{δ) Αν } f(0) = -1 \text{ τοτε } f(x) \leq 0, x \in [-1, 1]$$

$$\text{οποτε } f(x) = -\sqrt{1-x^2}, x \in [-1, 1]$$

$$f^2(x) = 1-x^2$$

$$\text{Θαω } y = f(x)$$

$$y^2 = 1-x^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ κυκλωση}$$

$$p \in \text{κεντρο } (0,0) \text{ και } p=1$$

$$\text{Αν } y \geq 0 \text{ κυκλωση } \frac{1}{2}$$

$$\text{Αν } y \leq 0 \text{ κυκλωση } \frac{1}{2}$$

Θέμα 6^ο Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$f^2(x) = 4e^x f(x) + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 2 - \sqrt{5}.$$

$$f^2(x) = 4e^x f(x) + 1 \Leftrightarrow f^2(x) - 4e^x f(x) = 1 \Leftrightarrow f^2(x) - 4e^x f(x) + 4e^{2x} = 4e^{2x} + 1$$

$$(f(x) - 2e^x)^2 = 4e^{2x} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{(f(x) - 2e^x)^2} = \sqrt{4e^{2x} + 1} \Rightarrow |f(x) - 2e^x| = \sqrt{4e^{2x} + 1}$$

$$\text{Θαω } g(x) = f(x) - 2e^x, \text{ οποτε } |g(x)| = \sqrt{4e^{2x} + 1}, x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow |g(x)| = 0 \Leftrightarrow 4e^{2x} + 1 = 0 \text{ Αδυνατο}$$

Αρα $g(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$ και αρα είναι συνεχής διαστημ ηρωσας οω R

$$\text{Γνωω } g(0) = f(0) - 2e^0 = 2 - \sqrt{5} - 2 = -\sqrt{5} < 0 \text{ 'Αρα } g(x) < 0, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{οποτε } g(x) = -\sqrt{4e^{2x} + 1} \Rightarrow f(x) - 2e^x = -\sqrt{4e^{2x} + 1} \Rightarrow$$

$$f(x) = 2e^x - \sqrt{4e^{2x} + 1}$$