Θέμα 7ο Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει $f^2(x)=x^2$ για κάθε $x\in\Re$.

$$f^2(x)=x^2 \Longleftrightarrow \sqrt{f^2(x)}=\sqrt{x^2} \Leftrightarrow |f(x)|=|x| \quad (1)$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow |f(x)|=0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |x|=0 \Leftrightarrow x=0$$

Αφού f συνεχής και $f(x)\neq 0$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ η f διατηρεί πρόσημο στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$

1η)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

$f(x)\geq 0, x\in R \Rightarrow |f(x)|=f(x)$ οπότε

$(1)\Rightarrow f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0\end{cases}$

2η)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

$f(x)\leq 0, x\in R \Rightarrow |f(x)|=-f(x)$ οπότε

$(1)\Rightarrow -f(x)=|x| \Rightarrow f(x)=-|x|=\begin{cases} -x, & x\geq 0 \\ x, & x<0\end{cases}$

3η)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- για $x>0$ είναι $f(x)>0$ οπότε
  $(1)\Rightarrow f(x)=x$
- για $x<0$ είναι $f(x)<0$ οπότε
  $(1)\Rightarrow -f(x)=-x \Rightarrow f(x)=x$
- $f(0)=0$

Τελικά $f(x)=x, x\in R$

4η)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

- για $x>0$ είναι $f(x)<0$ οπότε
  $(1)\Rightarrow -f(x)=x \Rightarrow f(x)=-x$
- για $x<0$ είναι $f(x)>0$ οπότε
  $(1)\Rightarrow f(x)=-x$

$\cdot\ f(0)=0$

Τελικά $f(x)=-x,\ x\in\mathbb{R}$

Θέμα 8ο Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύει
$f^2(x)+2\eta\mu^2 x=2\eta\mu x\cdot f(x)+x^2$ για κάθε $x\in\Re$ και $f(\pi)<0$, $f(-\pi)>0$.

$f^2(x)+2\eta\mu^2x=2\eta\mu x\cdot f(x)+x^2 \Rightarrow$

$f^2(x)-2\eta\mu x\cdot f(x)+\eta\mu^2x=x^2-\eta\mu^2x \Rightarrow (f(x)-\eta\mu x)^2=x^2-\eta\mu^2x$

$\Rightarrow \sqrt{(f(x)-\eta\mu x)^2}=\sqrt{x^2-\eta\mu^2x} \Rightarrow |f(x)-\eta\mu x|=\sqrt{x^2-\eta\mu^2x}$ (1)

Θέτω $f(x)-\eta\mu x=g(x)$ οπότε (1) $\Rightarrow |g(x)|=\sqrt{x^2-\eta\mu^2x}$ (2)

$g(x)=0 \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \sqrt{x^2-\eta\mu^2x}=0 \Longleftrightarrow x^2=\eta\mu^2x \Longleftrightarrow |x|=|\eta\mu x| \Longleftrightarrow \boxed{x=0}$

Συνεπώς $g(x)\neq 0$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και αφού g συνεχής ως διαφορά συνεχών, οπότε η g διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ χωριστά.

Όμως $g(\pi)=f(\pi)-\eta\mu\pi=f(\pi)<0$ οπότε $g(x)<0$, για $x>0$

$g(-\pi)=f(-\pi)-\eta\mu(-\pi)=f(-\pi)>0$ οπότε $g(x)>0$, για $x<0$

x	$-\infty$ $\quad -\pi \quad$ 0 $\quad \pi \quad$ $+\infty$
$g(x)$	$\quad +\quad 0 \quad -$

για $x>0$ (2) $\Rightarrow -g(x)=\sqrt{x^2-\eta\mu^2x}$

$\Rightarrow g(x)=-\sqrt{x^2-\eta\mu^2x}$

για $x<0$ (2) $\Rightarrow g(x)=\sqrt{x^2-\eta\mu^2x}$

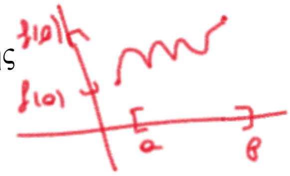
Τελικά $g(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-\eta\mu^2x}, & x<0\\ -\sqrt{x^2-\eta\mu^2x}, & x\geq 0\end{cases} \Rightarrow f(x)-\eta\mu x=\begin{cases}\sqrt{x^2-\eta\mu^2x}, & x<0\\ -\sqrt{x^2-\eta\mu^2x}, & x\geq 0\end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=\begin{cases}\eta\mu x+\sqrt{x^2-\eta\mu^2x}, & x<0\\ \eta\mu x-\sqrt{x^2-\eta\mu^2x}, & x\geq 0\end{cases}}$$

$\Longrightarrow f(x)=\begin{cases} \dots \\ 4+x-\sqrt{x^2-4\mu^2x}, & x\geq 0 \end{cases}$

Θέμα 1ο Ερωτήσεις Σ – Λ

1. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], και παίρνει δύο διαφορετικές τιμές $f(x_1)$, $f(x_2)$ με $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$, τότε παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$. Σ
2. Κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το R έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Λ πχ $f(x)=x^3$, $f(R)=R$
3. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και το Δ είναι ανοιχτό τότε και το f(Δ) είναι ανοιχτό . Λ
4. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και το Δ είναι κλειστό τότε και το f(Δ) είναι κλειστό. Λ υπαρχει η $f(x)=c$, $f(\Delta)=\{c\}$
5. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και μη σταθερή σε ένα διάστημα Δ και το Δ είναι κλειστό τότε και το f(Δ) είναι κλειστό. Σ
6. Αν f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση με πεδίο ορισμού (α , β) τότε το σύνολο τιμών της είναι το (f(α) , f(β)) . Λ $f\big((\alpha,\beta)\big)=\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x), \lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)\right)$
7. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [α, β], τότε το σύνολο τιμών της είναι [f(α), f(β)]. Σ
8. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [α, β], τότε το σύνολο τιμών της είναι [f(β), f(α)]. Σ
9. Αν η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right)$. Σ
10. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β]και το σύνολο τιμών της είναι [f(α), f(β)] τότε η f είναι γνησίως αύξουσα . Λ



Θέμα 2ο

Αν για μια συνεχή συνάρτηση f στο R, ισχύει $f(x_1) = 1$ και $f(x_2) = 4$ με $x_1 < x_2$, τότε υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \pi$.

$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχης στο } R \\ f(x_1)=1 \quad 1<\pi<4 \Rightarrow f(x_1)<\pi<f(x_2) \\ f(x_2)=4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Θ.Ε.Τ}}$ υπαρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ με $f(x_0)=\pi$

Θέμα 3ο

Αν $f:\Re\to\Re$ μια συνεχής για την οποία ισχύει $f(e)<f(2023)<f(\pi)$ να δείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχης στο } R \\ f(e)<f(2023)<f(\pi) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ΘΕΤ}}$ υπαρχει $x_0\in(e,\pi)$ με $f(x_0)=f(2023)$

η

ομως $x_0\in(e,\pi) \Rightarrow x_0\neq 2023$

οπότε f όχι 1-1

Θέμα 4ο

Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\Re \to \Re$ για τις οποίες ισχύει $(f(x)-1)(f(x)-2)=0$ για κάθε $x \in \Re$.

$f(x)=1$, $x \in R$ ή $f(x)=2$, $x \in R$ ή $f(x)=\begin{cases} 1, & x \in A \\ 2, & x \in R-A \end{cases}$ → Απορρίπτεται διότι

Όμως f είναι συνεχής και αν έπαιρνε και τις δύο τιμές δηλαδή και το 1 και το 2 θα έπρεπε να παίρνει και τις ενδιάμεσες που είναι άτοπο