Θέμα 5ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [α, β]. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{3}$

$f \downarrow [\alpha,\beta]$ και $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta \xRightarrow{f\downarrow} f(\alpha) > f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > f(\beta)$

- $\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3} < f(\alpha) \Leftrightarrow f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < 3f(\alpha) \Leftrightarrow$

  $f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < 2f(\alpha)$ που ισχύει αφού $\left.\begin{matrix} f(\beta)<f(\alpha) \\ f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<f(\alpha)\end{matrix}\right\} \xrightarrow{(+)}$

  $f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < 2f(\alpha)$

- $\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3} > f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 3f(\beta) \Leftrightarrow$

  $f(\alpha)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 2f(\beta)$ που ισχύει αφού $\left.\begin{matrix} f(\alpha)>f(\beta) \\ f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>f(\beta)\end{matrix}\right\} \xrightarrow{(+)}$

  $f(\alpha)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 2f(\beta)$

Συνεπώς $f(\alpha) > \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3} > f(\beta)$, f συνεχής από ΘΕΤ υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ με $f(\xi) = \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}$ και λόγω μονοτονίας μοναδικό.

Θέμα 6ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α, β]. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{3}$

Αφού f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ από ΘΜΕΤ η f παίρνει μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m, δηλαδή $m \le f(x) \le M$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ (Σύνολο τιμών)

$m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ (Σύνολο τιμών της f είναι $[m, M]$)

οπότε $m \leq f(\alpha) \leq M$, $m \leq f(\beta) \leq M$, $m \leq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq M$ $\Rightarrow 3m \leq f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq 3M \Rightarrow$

$m \leq \frac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3} \leq M$

οπότε υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ με $f(\xi) = \frac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}$

Θέμα 7ο Ερωτήσεις αντιστοίχισης

Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής και γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα στοιχείο της στήλης Β

Στήλη Α	**Στήλη Β**
πεδίο ορισμού	***σύνολο τιμών***
1. $\Delta = [\alpha, \beta]$	**α.** $(\lim_{x\to\beta} f(x), \lim_{x\to\alpha} f(x))$
2. $\Delta = [\alpha, \beta)$	**β.** $[f(\alpha), \lim_{x\to\beta} f(x))$
3. $\Delta = (\alpha, \beta]$	**γ.** $(\lim_{x\to\beta} f(x), f(\alpha)]$
4. $\Delta = (\alpha, \beta)$	**δ.** $[f(\beta), f(\alpha)]$
	ε. $[f(\beta), \lim_{x\to\alpha} f(x))$
	ζ. $(\lim_{x\to\alpha} f(x), f(\beta)]$

1 → δ

2 → γ

3 → ε

4 → α

Θέμα 8ο

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \gamma \in R$ και $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \delta \in R$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει: $f(x_0) + e^{x_0+1} + \ell n x_0 = 1$.

Θεωρώ $g(x) = f(x) + e^{x+1} + \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

g συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2 \xrightarrow[\ln\uparrow]{f\uparrow}$ $f(x_1) < f(x_2)$, $\ln x_1 < \ln x_2$

$x_1 + 1 < x_2 + 1 \xrightarrow{e^x \uparrow} e^{x_1+1} < e^{x_2+1}$ (+)

$g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow g \uparrow (0,+\infty)$

$g\left((0,+\infty)\right) = \left(\lim_{x\to 0^+} g(x), \lim_{x\to +\infty} g(x)\right) = (-\infty, +\infty) = R$

$$g\big((0,+\infty)\big) = \Big(\lim_{x\to 0^+} g(x), \lim_{x\to +\infty} g(x)\Big) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(f(x) + e^{x+1} + \ln x\right) = -\infty$, $\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(f(x) + e^{x+1} + \ln x\right) = +\infty$

Αφού $1 \in g\big((0,+\infty)\big)$ υπάρχει $x_0 \in (0,+\infty)$ με $g(x_0) = 1 \Rightarrow$

$f(x_0) + e^{x_0+1} + \ln x_0 = 1$ και λόγω μονοτονίας μοναδικό.

Θέμα 9ο

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο (α,β) με $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to\beta^-} f(x) = +\infty$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει: $f(x_0) + e^{-x_0}$ - ημx_0 = 2023.

Θεωρώ $g(x) = f(x) + e^{-x} - ημx$, $x \in (\alpha, \beta)$

g συνεχής

$\lim_{x\to \alpha^+} g(x) = \lim_{x\to \alpha^+}\left(f(x) + e^{-x} + ημx\right) = -\infty$

$\lim_{x\to \beta^-} g(x) = \lim_{x\to \beta^-}\left(f(x) + e^{x} + ημx\right) = +\infty$

$g\big((\alpha,\beta)\big) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

$2023 \in g\big((\alpha,\beta)\big)$

οπότε $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $g(x_0) = 2023 \Rightarrow$

$f(x_0) + e^{-x_0} + ημx_0 = 2023$