

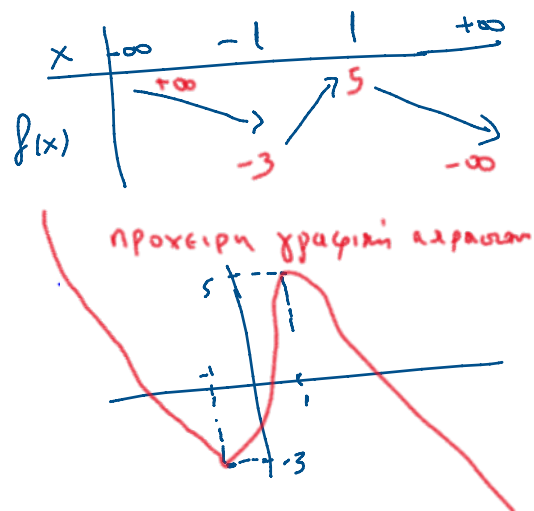
Θέμα 10°

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και ισχύουν

$$f(-1) = -3, \quad f(1) = 5, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

A) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της

B) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$ για τις διάφορες του πραγματικού αριθμού λ .



$$D_1 = (-\infty, -1], \quad D_2 = [-1, 1], \quad D_3 = (1, +\infty)$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ συνεχής} \\ f \downarrow D_1 \end{array} \right\} f(D_1) = [f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [-3, +\infty)$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ συνεχής} \\ f \uparrow D_2 \end{array} \right\} f(D_2) = (\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), f(1)] = (-3, 5]$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ συνεχής} \\ f \downarrow D_3 \end{array} \right\} f(D_3) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)) = (-\infty, 5)$$

$$f(\mathbb{R}) = f(D_1) \cup f(D_2) \cup f(D_3) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

β). Αν $\lambda > 5$ τότε $\lambda \notin f(D_2), \lambda \notin f(D_3), \lambda \in f(D_1)$ οπότε υπάρχει $x_1 \in D_1$ με $f(x_1) = \lambda$ και λόγω μονotonίας μοναδικό.

• Αν $\lambda = 5$ τότε $\lambda \notin f(D_3), \lambda \in f(D_2), \lambda \in f(D_1)$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in D_2, x_2 \in D_1$ με $f(x_1) = f(x_2) = \lambda$ και λόγω μονotonίας μοναδικό.

• Αν $-3 < \lambda < 5$ τότε $\lambda \in f(D_3), \lambda \in f(D_2), \lambda \in f(D_1)$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in D_1, x_2 \in D_2, x_3 \in D_3$ με $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = \lambda$ και λόγω μονotonίας μοναδικό.

• Αν $\lambda = -3$ τότε $\lambda \notin f(D_2), \lambda \in f(D_1), \lambda \in f(D_3)$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in D_1, x_2 \in D_3$ με $f(x_1) = f(x_2) = \lambda$ και λόγω μονotonίας μοναδικό.

• Αν $2 \in \mathbb{Z}$ τότε $2 \notin f(A_1)$, $2 \notin f(A_2)$, $2 \in f(A_3)$ οπότε υπάρχει μοναδικό $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ με $f(x_1) = f(x_2) = 2$ και λόγω μονοτονίας μοναδικό.

• Αν $2 \notin \mathbb{Z}$ τότε $2 \notin f(A_1)$, $2 \notin f(A_2)$, $2 \in f(A_3)$ οπότε υπάρχει $x_1 \in A_3$ με $f(x_1) = 2$ και λόγω μονοτονίας μοναδικό.

Θέμα 11°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x^2 - \frac{1}{x}$.

α) Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2023$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

ε) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να δείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

στ) Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$ αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

α) $D_f = (0, +\infty)$

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} \ln x_1 < \ln x_2 \\ x_1^2 < x_2^2 \\ \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x_1 < \ln x_2 \\ x_1^2 < x_2^2 \\ -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} \ln x_1 < \ln x_2 \\ x_1^2 < x_2^2 \\ -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \end{cases}$

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow (0, +\infty)$

β) f συνεχής, $f \uparrow (0, +\infty)$ οπότε $f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

γ) $2023 \in f((0, +\infty)) = \mathbb{R}$ οπότε υπάρχει $x_0 \in D_f = (0, +\infty)$ με $f(x_0) = 2023$ και λόγω μονοτονίας μοναδικό.

δ) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + x^2 - \frac{1}{x} = 0$

Προφανώς π.γ.α η $x=1$ και λόγω μονοτονίας μοναδική αφού $\ln 1 + 1^2 - \frac{1}{1} = 0 + 1 - 1 = 0$

ε) $f \uparrow (0, +\infty)$ με και 1-1 οπότε f αντιστρέφεται και

μάξιστα $D_{f^{-1}} = f((0, +\infty)) = \mathbb{R}$

Γ... .. $\forall x_1, x_2 \in D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(f^{-1}(x_1)) < f(f^{-1}(x_2)) \xrightarrow{f \uparrow}$

$\Gamma_{10} \text{ καὶ } \forall y_1, y_2 \in D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \quad y_1 < y_2 \implies f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2)) \xRightarrow{f \text{ ἄντ.}} f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \implies f^{-1} \uparrow \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{α) } D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \\ f^{-1} \text{ συνεχής} \\ f \uparrow \mathbb{R} \end{array} \right\} \begin{array}{l} f^{-1}(p) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) \right) \\ \text{οπότε } f^{-1}(\mathbb{R}) = D_f = (0, +\infty) \quad \text{οπότε} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty \end{array}$$