Θέμα 12ο

Εστω $f:(-\infty,0)\to\Re$ με $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}+2023$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

β) Να δείξετε ότι υπάρχει η f^{-1} και να δείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα

γ) Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής να βρείτε τα

$$\lim_{x\to-\infty} f^{-1}(x)\ ,\ \lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)\ ,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}\ ,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$$

α) $D_f=(-\infty,0)$, f συνεχής ως άθροισμα συνεχών

για καθε $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ με $x_1<x_2 \overset{x_1,x_2<0}{\Longrightarrow} \begin{cases} x_1^2>x_2^2 \\ \frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\end{cases} \overset{(+)}{\Longrightarrow} x_1^2+\frac{1}{x_1}>x_2^2+\frac{1}{x_2}$

$\Rightarrow x_1^2+\frac{1}{x_1}+2023>x_2^2+\frac{1}{x_2}+2023 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow f \downarrow (-\infty,0)$

$f\big((-\infty,0)\big)=\left(\lim\limits_{x\to0^-}f(x),\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=R$

β) $f\downarrow(-\infty,0) \Rightarrow f:1-1 \Rightarrow f$ αντιστρεφεται με $D_{f^{-1}}=f((-\infty,0))=R$

για καθε $y_1,y_2\in D_{f^{-1}}=R$ με $y_1<y_2 \Rightarrow f(f^{-1}(x_1))<f(f^{-1}(y_2)) \overset{f\downarrow}{\Longrightarrow}$

$f^{-1}(y_1)>f^{-1}(y_2) \Rightarrow f^{-1}\downarrow R$

γ) $\left.\begin{array}{l} f^{-1} \text{ συνεχής} \\ f^{-1}\downarrow R \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} f^{-1}(R)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x),\ \lim\limits_{x\to-\infty}f^{-1}(x)\right) \\ \text{Όμως } f^{-1}(R)=D_f=(-\infty,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}f^{-1}(x)=0\end{array}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)} \overset{f^{-1}(x)=u}{=\!=\!=} \lim_{u\to0}\frac{u-f(u)}{f(u)+u}=\lim_{u\to0}\frac{u-u^2-\frac{1}{u}-2023}{u^2+\frac{1}{u}+2023+u}=$$

$f^{-1}(x)=u \Rightarrow x=f(u)$

$x\to-\infty$, $f^{-1}(x)\to0$

$$=\lim_{u\to0}\frac{u^2-u^3-1-2023u}{u^3+1+2023u+u^2}=\frac{-1}{1}=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)} \overset{f^{-1}(x)=u}{=\!=\!=} \lim_{u\to-\infty}\frac{u-f(u)}{f(u)+u} = \lim_{u\to-\infty}\frac{u-u^2-\frac{1}{u}-2023}{u^2+\frac{1}{u}+2023+u} =$$

$$f^{-1}(x)=u \Rightarrow x=f(u)$$

$$x\to+\infty,\quad f^{-1}(x)\to-\infty$$

$$=\lim_{u\to-\infty}\frac{u^2-u^3-1-2023u}{u^3+1+2023u+u^2} = \lim_{u\to-\infty}\frac{-u^3}{u^3} = -1$$

Θέμα 1ο Ερωτήσεις τύπου Σ ή Λ

1. Για να ισχύουν για την f οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[\alpha,\beta]$ πρέπει η f να είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Σ
2. Για να ισχύουν για την f οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[\alpha,\beta]$ αρκεί η f να είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Λ
3. Για να ισχύουν για την f οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[\alpha,\beta]$ πρέπει και αρκεί η f να είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$. Σ
4. Για να ισχύει για την f το συμπέρασμα του θεωρήματος Bolzano στο $[\alpha,\beta]$ πρέπει η f να είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Λ

5. Για να ισχύει για την f το συμπέρασμα του θεωρήματος Bolzano στο $[\alpha,\beta]$ πρέπει και αρκεί η f να είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$. Λ
6. Για να ισχύει για την f το συμπέρασμα του θεωρήματος Bolzano στο $[\alpha,\beta]$ αρκεί η f να είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$. Σ
7. Για να διατηρεί πρόσημο η f στο $[\alpha,\beta]$ πρέπει η f να είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και να μη μηδενίζεται σε αυτό. Λ

8. Για να διατηρεί πρόσημο η f στο $[\alpha,\beta]$ αρκεί η f να είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και να μη μηδενίζεται σε αυτό. Σ
9. Για να παίρνει η f μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[\alpha,\beta]$ πρέπει η f να είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Λ

10. Για να παίρνει η f μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[\alpha,\beta]$ αρκεί η f να είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Σ
11. Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και δεν υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ τότε η f δεν αντιστρέφεται. Σ

    άρα δεν ισχύει το Θ ΕΤ

    $\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ είναι μεταξύ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$

    συνεχής $\Longrightarrow$ $f(\alpha)=f(\beta)$ $\Longrightarrow$ f όχι 1-1
12. Αν συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$, είναι 1-1 και δεν υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ τότε η f δεν είναι συνεχής. Σ

    δεν ισχύει το ΘΕΤ

    1-1 $\longrightarrow$ $f(\alpha)\neq f(\beta)$
13. Αν συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ και δεν υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ τότε η f δεν μπορεί να είναι και συνεχής και 1-1 .
14. Αν συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε υπάρχει $x_o\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$
15. Αν για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[\alpha,\beta]$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι 1-1 τότε $\alpha\cdot\beta<0$
16. Αν για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Ε.Τ στο $[\alpha,\beta]$, $f(1)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ και είναι 1-1 τότε $(\alpha-1)\cdot(1-\beta)>0$
17. Αν για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Ε.Τ στο $[\alpha,\beta]$ και δεν υπάρχει $x_o\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=\eta$ τότε $(\eta-f(\alpha))\cdot(\eta-f(\beta))>0$