

13. Αν συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ και δεν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο

ώστε $f(x_0) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$ τότε η f δεν μπορεί να είναι και συνεχής και 1-1.

14. Αν συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$$

Αν $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$
Αν $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε $x_0 = \alpha$ ή $x_0 = \beta$

15. Αν για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[\alpha, \beta]$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι 1-1 τότε $\alpha \cdot \beta < 0$

16. Αν για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Ε.Τ στο $[\alpha, \beta]$,

$$f(1) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \text{ και είναι 1-1 τότε } (\alpha - 1) \cdot (1 - \beta) > 0$$

17. Αν για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Ε.Τ στο $[\alpha, \beta]$ και δεν υπάρχει

$x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$ τότε $(\eta - f(\alpha)) \cdot (\eta - f(\beta)) > 0$

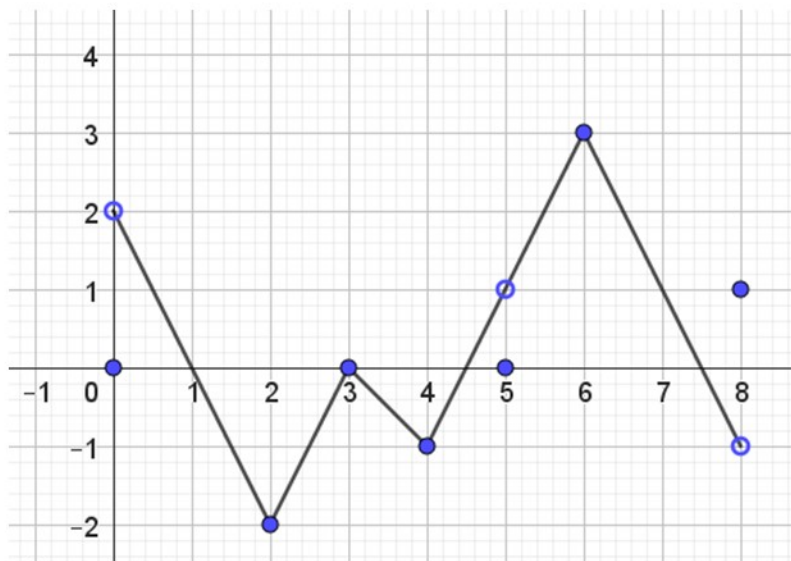
Το η δεν είναι μετ' των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ $\Rightarrow \eta < f(\alpha) < f(\beta)$
οντε $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$

$$f(\alpha) < f(\beta) < \eta$$

$$f(\beta) < f(\alpha) < \eta$$

Θέμα 2ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\Delta = [0, 8]$. Με βάση το παρακάτω σχήμα να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ - Λ.



1. Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[0, 2]$.

2. Για την f ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Bolzano στο $[0, 2]$.

3. Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[2, 4]$.

4. Για την f ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Bolzano στο $[2, 4]$.

5. Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[4, 6]$.

6. Για την f ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Bolzano στο $[4, 6]$.

7. Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Ε.Τ στο $[0, 8]$.

8. Για την f ισχύει το συμπέρασμα του Θ.Μ.Ε.Τ στο

9. Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Ε.Τ στο $[4, 6]$.

10. Για την f ισχύει το συμπέρασμα του Θ.Ε.Τ στο $[4, 6]$ για $\eta = 2$.

11. Για την f ισχύει το συμπέρασμα του Θ.Ε.Τ στο $[4, 6]$ για $\eta = 1$.

12. Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Ε.Τ στο $[5, 8]$.

13. Για την f ισχύει το συμπέρασμα του Θ.Ε.Τ στο $[5, 8]$ για $\eta = 1$.

14. $f(\Delta) = [-2, 3]$

15. Η f διατηρεί πρόσημο στο $[2, 4]$

8. Για την f' ισχύει το
 συμπέρασμα του Θ.Μ.Ε.Τ στο $[0, 8]$. Σ
 $\max = 3, \min = -2$

14. $f(\Delta) = [-2, 3]$ Σ

15. Η f διατηρεί πρόσημο στο $[2, 4]$ $\uparrow f(3) = 0$

16. Η f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα ανοικτά διαστήματα με άκρα διαδοχικές της ρίζες. Σ

Θέμα 4^ο

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της f .

δ) Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$g^2(x) = f^2(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) $D_f = \mathbb{R}$, f συνεχώς ως πραγματ. συνεχών
 για καθ. $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{matrix} e^{x_1} < e^{x_2} \\ x_1 - 1 < x_2 - 1 \end{matrix} \quad (+)$
 $\underline{f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}}$

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

β) $f(0) = e^0 + 0 - 1 = 1 - 1 = 0$ οπότε το 0 είναι ρίζα της f
 και λόγω μονοτονίας μοναδική.

γ)

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
επιλεγμ. τιμή $f(x)$		$f(-1) = e^{-1} - 1 - 1 = \frac{1}{e} - 2 < 0$	$f(0) = 0$	$f(1) = e^1 + 1 - 1 = e > 0$	
		-		+	