

Μάθημα 47ο - Η έννοια της παραγώγου

Θέμα 2° Αν $f(x) = \eta\mu^2 x$ να βρείτε το $f'(0)$. ii) Οποια αν $g(x) = \sqrt{x}$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \eta\mu x \right) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

οπότε η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Θέμα 3°

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sin x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 0 \neq f(0) \text{ οπότε η}$$

f είναι ασυνεχώς στο 0

β) Αφού η f δεν είναι συνεχής στο 0 δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη στο 0.

Θέμα 4°

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x)_{\mathbb{R}} = \begin{cases} x+1 & , \text{αν } x < 0 \\ 1 & , \text{αν } x = 0 \\ \sin x & , \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

$$a) \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 1 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0) \Rightarrow f \text{ συνεχής στο } 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$$

Συνεπώς η f δα είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Θέμα 5°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ β) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$.

Αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 0 $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \alpha \Rightarrow 1 - 0 = \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \eta\mu \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot x \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 \eta\mu \frac{1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-x \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$$

Θέμα 6°

Να βρείτε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \pi$, η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x < \pi \\ ax + \beta, & x \geq \pi \end{cases}$$

Αφού f παραγωγίσιμη στο π θα είναι και συνεχής οπότε

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = f(\pi) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi^-} \eta\mu x = \lim_{x \rightarrow \pi^+} (ax + \beta) \rightarrow 0 = a\pi + \beta \Rightarrow$$

$$\boxed{\beta = -a\pi} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\eta\mu x - (a\pi + \beta)}{x - \pi} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\eta\mu x}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\eta\mu(\pi - x)}{-(\pi - x)}$$

$$\stackrel{\pi - x = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{-u} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{ax + \beta - (a\pi + \beta)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{ax + \cancel{\beta} - a\pi - \cancel{\beta}}{x - \pi} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{a(x - \pi)}{x - \pi} = a$$

Συνεπώς πρέπει $\boxed{a = -1}$ και (1) $\Rightarrow \boxed{\beta = \pi}$

Συνεπώς πρέπει $\boxed{\alpha = -1}$ και $\alpha \Rightarrow \boxed{\beta = \pi}$

Θέμα 7°

Εστω f, g, h συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = g(1) = h(1)$ και $f'(1) = g'(1)$.

Να αποδείξετε ότι η h είναι παραγωγίσιμη στο 1.

$$f \text{ παραγωγίσιμη} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

$$g \text{ παραγωγίσιμη} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1)$$

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} \in \mathbb{R}$$

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \Rightarrow f(x) - h(1) \leq h(x) - h(1) \leq g(x) - h(1) \xRightarrow{f(1)=g(1)=h(1)} f(x) - f(1) \leq h(x) - h(1) \leq g(x) - g(1)$$

$$\text{για } x > 1: \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \leq \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} \leq \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) & \quad \left\{ \begin{array}{l} f'(1) = g'(1) \\ \text{ναι} \\ \text{αποδεχόμενα} \end{array} \right. & \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = f'(1) = g'(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) & \end{aligned}$$

$$\text{για } x < 1: \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \geq \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} \geq \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) & \quad \left\{ \begin{array}{l} f'(1) = g'(1) \\ \text{ναι} \\ \text{αποδεχόμενα} \end{array} \right. & \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = f'(1) = g'(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) & \end{aligned}$$

Τότε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = f'(1) = g'(1)$ ή h είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $h'(1) = f'(1) = g'(1)$