

Μάθημα 48ο - Η έννοια της παραγώγου

Θέμα 8°

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 2$ β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu x}$

$$\alpha) f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$$

β) Αφού f παραγωγίσιμη στο 0, θα είναι και συνεχής στο 0, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{\eta \mu x}{x}} = \frac{2}{1} = 2$$

Θέμα 9°

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

$$f(x_0) - x_0 f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x f(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0}$$

$$f \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x f(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x f(x_0) - x_0 f(x) + x_0 f(x_0) - x_0 f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x_0 (f(x) - f(x_0)) + f(x_0) (x - x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(-x_0 \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x_0) (x - x_0)}{x - x_0} \right) = -x_0 \cdot f'(x_0) + f(x_0)$$

Θέμα 10°

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

$$3f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - h)}{h}$$

$$f \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - h) + f(x_0) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} \right) \stackrel{**}{=} 2f'(x_0) - (-f'(x_0)) = 3f'(x_0)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} \right) \stackrel{**}{=} 2f'(x_0) - (-f'(x_0)) = 3f'(x_0)$$

$$* \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} \stackrel{2h=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{\frac{u}{2}} = \lim_{u \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u} = 2f'(x_0)$$

$$** \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} \stackrel{-h=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{-u} = -f'(x_0)$$

Θέμα 11°

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 1, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει $f(x) = |x - 1| \cdot g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η τιμή $g(1)$.

$$g \text{ συνεχής στο } 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)} \quad (1)$$

$$f \text{ παραγωγίσιμη στο } 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x - 1| \cdot g(x) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x - 1| \cdot g(x) - 0}{x - 1} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{x - 1} g(x)}{\cancel{x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(\cancel{x - 1}) g(x)}{\cancel{x - 1}} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} g(1) = -g(1) \Rightarrow 2g(1) = 0 \Rightarrow \boxed{g(1) = 0}$$

Θέμα 12°

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, της οποίας η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ σχηματίζει με τον xx' γωνία 135° . Να αποδείξετε ότι

$$\text{i. } f'(0) = -1 \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = -1 \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - 1}{x^2 - 1} = +2.$$

$$\text{i) } f'(0) = \angle \varphi_{135^\circ} = -1$$

$$A(0,1) \in C_f \Rightarrow f(0) = 1$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = -1$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x) - 1)(f(x) + 1)}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - 1}{x} \cdot \frac{f(x) + 1}{x - 1} \right)$$

$$= f'(1) \cdot \frac{f(1)+1}{0-1} = -1 \cdot \frac{1+1}{-1} = 2$$

$\hookrightarrow f$ παραγωγίσιμη στο 0 $\overset{!}{\text{ύρα και συνεχής στο 0}}$
 οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

Θέμα 13°

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $[a, b]$ με $f'(b) < 0$. Να δείξετε ότι το $f(b)$ δεν είναι μέγιστο.

$$f'(b) < 0 \xRightarrow{x \in [a, b]} \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} < 0 \xRightarrow{\text{για } x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} < 0$$

Ομω αφού $x \rightarrow b^-$ είναι $x < b \Rightarrow x - b < 0$

οπότε $f(x) - f(b) > 0 \Rightarrow f(x) > f(b)$ για $x \rightarrow b^-$

Συνεπώς το $f(b)$ δεν είναι μέγιστο.