Μάθημα 51ο - Παράγωγος συνάρτηση - κανόνες παραγώγισης

Θέμα 1ο Ερωτήσεις Σ – Λ

1. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f' είναι συνεχής στο x_0. Λ (όχι απαραίτητα)
2. Για κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο x_o ισχύει $f'(x_o) = (f(x_o))'$. Λ $\to 0$
3. Για να είναι η $f+g$ παραγωγίσιμη στο x_0 πρέπει να είναι και η f και η g παραγωγίσιμες στο x_0 Λ π.χ $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=-\sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγ. στο 0
4. Για να είναι η $f+g$ παραγωγίσιμη στο x_0 αρκεί να είναι και η f και η g παραγωγίσιμες στο x_0 Σ
5. Για να είναι η $f \circ g$ παραγωγίσιμη στο x_0 αρκεί να είναι και η f και η g παραγωγίσιμη στο x_0 Λ
6. Για να είναι η $f \circ g$ παραγωγίσιμη στο x_0 αρκεί να είναι η g παραγωγίσιμη στο x_0 και η f παραγωγίσιμη στο $g(x_o)$. Σ
7. $(\ln 5)' = \frac{1}{5}$ Λ

$$(\ln 5)' = (\varepsilon\varphi \tfrac{\pi}{3})' = (\sqrt{2})' = (e^3)' = 0$$

8. $(\eta\mu\frac{\pi}{3})' = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$ Λ
9. $(\sqrt{2})' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Λ
10. $(e^3)' = e^3$ Λ
11. $(\varepsilon\varphi\chi)' = 1 + \varepsilon\varphi^2\chi$ Σ
12. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. Λ στο 0 δεν είναι παραγωγίσιμη
13. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$. Σ
14. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ Σ
15. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x$. Σ
16. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = -\frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$ Σ
17. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$ Σ

13) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - e^0}{h - 0} = f'(0) = e^0 = 1$

όπου $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

14) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = f'(1) = 1$

όπου $f(x) = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

15) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = f'(x) = e^x$

όπου $f(x) = e^x$

16) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

όπου $f(x) = \frac{1}{x}$

17) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = f'(x) = \frac{1}{x}$

όπου $f(x) = \ln x$

$f(x) = x^2 + \varepsilon\varphi x - \sqrt{x}$	$f(x) = x\ln x$

$f(x) = x^2 + ημx - \sqrt{x}$

$f'(x) = 2x + συνx - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = x\ln x$

$f'(x) = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$
$= \ln x + 1$

$f(x) = \frac{e^x}{x}$

$$f'(x) = \frac{(e^x)'x - e^x(x)'}{x^2} = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

Θέμα 2° Να εξετάσετε αν η $f(x) = x\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την $f'(x)$

$D_f = [0, +\infty)$ f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων

Για $x > 0$ $f'(x) = (x)' \cdot \sqrt{x} + x \cdot (\sqrt{x})' = 1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$
$= \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

Για $x = 0$: $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$

Άρα $f'(0) = 0$

Τελικά $f'(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{x}}{2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \frac{3\sqrt{x}}{2}, x \geq 0$

Ομοίως για την $f(x) = ημx \cdot \sqrt{x}$

$D_f = [0, +\infty)$, f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων με $f'(x) = (ημx)'\sqrt{x} + ημx(\sqrt{x})' =$
$= συνx \cdot \sqrt{x} + ημx \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

για $x = 0$: $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{ημx\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{ημx}{x} \cdot \sqrt{x}\right) = 1 \cdot 0 = 0$

Άρα $f'(0) = 0$

Τελικά $f'(x) = \begin{cases} συνx \cdot \sqrt{x} + ημx \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Θέμα 3ο Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

i) $f(x)=(x^2-3x+8)\cdot\sigma\upsilon\nu x$ *ii)* $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\eta\mu\chi}$ *iii)* $f(x)=\sqrt[4]{x^2+1}-e^{x^2+2}$

iv) $f(x)=\varepsilon\varphi(x^2+3x)-\ln(x^2+x+1)$ *v)* $f(x)=\eta\mu^3(x^2+3x)$ *vi)* $f(x)=\ln^3(x^2+1)$

vii) $f(x)=5^{x^2+1}-x^{\sqrt{2}}$ *viii)* $f(x)=(x^2+2)^x$ *ix)* $f(x)=x|x+1|$

i) $f'(x)=(2x-3)\cdot\sigma\upsilon\nu x+(x^2-3x+8)(-\eta\mu x)$

ii) $f'(x)=\dfrac{2x\cdot\eta\mu x-(x^2-1)\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$

iii) $f(x)=\sqrt[4]{x^2+1}-e^{x^2+2}$, $x^2+1\geq 0 \Leftrightarrow x^2\geq -1$ που ισχύει

$D_f=\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αφού $x^2+1>0$

$f(x)=(x^2+1)^{\frac{1}{4}}-e^{x^2+2}$

$f'(x)=\frac{1}{4}(x^2+1)^{-\frac{3}{4}}\cdot(x^2+1)'-e^{x^2+2}\cdot(x^2+2)'=\frac{1}{4}\cdot\sqrt[4]{(x^2+1)^3}-2x\cdot e^{x^2+2}$

iv) $f(x)=\varepsilon\varphi(x^2+3x)-\ln(x^2+x+1)$

$f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(x^2+3x)}\cdot(x^2+3x)'-\dfrac{1}{x^2+x+1}\cdot(x^2+x+1)'=\dfrac{2x+3}{\sigma\upsilon\nu^2(x^2+3x)}-\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

v) $f(x)=\eta\mu^3(x^2+3x)=(\eta\mu(x^2+3x))^3$

$f'(x)=3\cdot\eta\mu^2(x^2+3x)\,(\eta\mu(x^2+3x))'=3\cdot\eta\mu^2(x^2+3x)\cdot\sigma\upsilon\nu(x^2+3x)\cdot(2x+3)$

vi) $f(x)=\ln^3(x^2+1)$

$f'(x)=3\cdot\ln^2(x^2+1)\cdot(\ln(x^2+1))'=3\cdot\ln^2(x^2+1)\cdot\dfrac{1}{x^2+1}\cdot 2x$