

Μάθημα 52ο - Παράγωγος συνάρτηση - Κανόνες παραγωγίσης

Λέμμα 4^ο Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

α) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ β) $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ γ) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ δ) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$

vii) $f(x) = 5^{x^2+1} - x^{\sqrt{2}}$ viii) $f(x) = (x^2+2)^x$ ix) $f(x) = x|x+1|$

α) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $D_f = [0, +\infty)$

f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$

για $x=0$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{1/3}} = +\infty$

οπότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

β) $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$, $D_f = [0, +\infty)$

f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ διότι $\frac{4}{3} > 1$ με $f'(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}$

Ειδικά για το 0: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{4/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/3} = 0$
↳ δεν χρειάζεται να γινεται

γ) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $D_f = \mathbb{R}$ $f(x) = |x|^{\frac{2}{3}} = \begin{cases} x^{\frac{2}{3}}, & x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{2}{3}}, & x < 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}, & x > 0 \\ -\frac{2}{3} (-x)^{-\frac{1}{3}}, & x < 0 \end{cases}$$

για $x=0$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{1/3}} = +\infty$

οπότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

δ) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$, $D_f = \mathbb{R}$ $f(x) = |x|^{\frac{4}{3}} = \begin{cases} x^{4/3}, & x \geq 0 \\ (-x)^{4/3}, & x < 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}, & x > 0 \\ -\frac{4}{3} (-x)^{\frac{1}{3}}, & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}}, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{για } x=0: \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{4}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{-(-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{-(-x)} = 0$$

ομοίως είναι παραγώγιση στο 0 με $f'(0) = 0$

$$\text{Τελικά } f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{vii) } f(x) = 5^{x^2+1} - x^{\sqrt{2}}, \quad D_f = [0, +\infty)$$

$\sqrt{2} > 1$, f παραγώγιση στο $[0, +\infty)$ με η παραγώγιση

$$f'(x) = 5^{x^2+1} \cdot \ln 5 \cdot (x^2+1)' - \sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}-1} = 2x \cdot 5^{x^2+1} \cdot \ln 5 - \sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}-1}$$

Προσπαθώ $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$$

$$(x^x)' = (e^{\ln x})^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot (\ln x + 1), x > 0$$

$$(f(x)^{g(x)})' = (e^{g(x) \cdot \ln f(x)})' = \dots$$

$$\hookrightarrow D_f \cap D_g \cap \{x / f(x) > 0\}$$

$$\text{v) } f(x) = (x^2+2)^x = e^{x \cdot \ln(x^2+2)}$$

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \\ f'(x) &= e^{x \cdot \ln(x^2+2)} \cdot (x \cdot \ln(x^2+2))' = \\ &= (x^2+2)^x \cdot \left(1 \cdot \ln(x^2+2) + x \cdot \frac{1}{x^2+2} \cdot 2x \right) = \\ &= (x^2+2)^x \left(\ln(x^2+2) + \frac{2x^2}{x^2+2} \right), x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{ix) } f(x) = x|x+1| = \begin{cases} x^2+x, & x \geq -1 \\ -x^2-x, & x < -1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1, & x > -1 \\ -2x-1, & x < -1 \end{cases}$$

$$\sum_{x \neq -1} : \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + x - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x(x+1)}{x+1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x^2 - x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x(x+1)}{x+1} = 1$$

Summavis $\neq f$ $\Rightarrow$ nincs meg az egyértelműség az -1 -en.