

Μάθημα 53ο - Παράγωγος συνάρτηση - Κανόνες παραγωγίσιμης

Θέμα 5ο

Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη και παραγωγίσιμη στο  $\alpha$ . Να δείξετε ότι :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{xf(x) - \alpha f(\alpha)}{x - \alpha} = f(\alpha) + \alpha f'(\alpha) \quad , \quad \beta) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{e^x f(x) - e^\alpha f(\alpha)}{x - \alpha} = e^\alpha (f(\alpha) + f'(\alpha))$$

$$\gamma) \text{ για } \alpha > 0 \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) \ln x - f(\alpha) \ln \alpha}{x - \alpha} = f'(\alpha) \ln \alpha + \frac{f(\alpha)}{\alpha}$$

$$f \text{ παραγωγίσιμη στο } \alpha \Rightarrow \begin{cases} f \text{ συνεχής στο } \alpha \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha) \\ \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{xf(x) - \alpha f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{xf(x) - xf(\alpha) + xf(\alpha) - \alpha f(\alpha)}{x - \alpha} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \alpha} \left( \frac{x(f(x) - f(\alpha))}{x - \alpha} + \frac{f(\alpha)(x - \alpha)}{x - \alpha} \right) = \alpha \cdot f'(\alpha) + f(\alpha)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{e^x f(x) - e^\alpha f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{e^x f(x) - e^x f(\alpha) + e^x f(\alpha) - e^\alpha f(\alpha)}{x - \alpha}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \alpha} \left( \frac{e^x (f(x) - f(\alpha))}{x - \alpha} + \frac{f(\alpha)(e^x - e^\alpha)}{x - \alpha} \right) = e^\alpha \cdot f'(\alpha) + f(\alpha) \cdot e^\alpha = e^\alpha (f'(\alpha) + f(\alpha))$$

$$\text{Σημειώνω } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{e^x - e^\alpha}{x - \alpha} = g'(\alpha) = e^\alpha$$

όπου  $g(x) = e^x$ ,  $g'(x) = e^x$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) \ln x - f(\alpha) \ln \alpha}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) \ln x - f(\alpha) \ln x + f(\alpha) \ln x - f(\alpha) \ln \alpha}{x - \alpha}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left( \ln x \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(a) \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \right) = \ln a \cdot f'(a) + f(a) \cdot \frac{1}{a}$$

δίνω  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = g'(a) = \frac{1}{a}$

οπου  $g(x) = \ln x$ ,  $g'(x) = \frac{1}{x}$

2ος τρόπος /

i)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x f(x) - a f(a)}{x - a} = g'(a) = f(a) + a \cdot f'(a)$

οπου  $g(x) = x f(x)$ ,  $g'(a) = 1 \cdot f(a) + a \cdot f'(a)$

αφορ  $g$  παραγωγισιμη στο  $a$  ως γνωστό παραγωγισιμη.

ii)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x f(x) - e^a f(a)}{x - a} = g'(a) = e^a \cdot f(a) + e^a \cdot f'(a) = e^a (f(a) + f'(a))$

οπου  $g(x) = e^x f(x)$ ,  $g$  παραγωγισιμη στο  $a$  ως γνωστό παραγωγισιμη  $\forall \in g'(a) = e^a \cdot f(a) + e^a \cdot f'(a)$

iii)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x f(x) - \ln a f(a)}{x - a} = g'(a) = \frac{1}{a} \cdot f(a) + \ln a \cdot f'(a)$

οπου  $g(x) = \ln x \cdot f(x)$ ,  $g'(a) = \frac{1}{a} \cdot f(a) + \ln a \cdot f'(a)$

Θέμα 6°

Έστω  $f, g, h$  συναρτήσεις ορισμένες στο  $\mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Αν  $f(5) = g(5) = f'(5) = g'(5) = 2$  να βρείτε το  $h'(5)$ .

$h$  παραγωγισιμη στο  $5$  ως γνωστό παραγωγισιμων  $\forall \in$

$$h'(5) = f'(5) \cdot g(5) + f(5) \cdot g'(5) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 8$$

### Θέμα 7°

Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη και παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει ότι  $f(x^3) = \eta\mu(\pi x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε το  $f'(-1)$ .

$f(x^3)$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως σύνθεση παραγωγίσιμων  
 Είναι  $f(x^3) = \eta\mu(\pi x) \implies \left(f(x^3)\right)' = (\eta\mu(\pi x))' \implies$   
 $f'(x^3) \cdot (x^3)' = \cos(\pi x) \cdot (\pi x)' \implies f'(x^3) \cdot 3x^2 = \pi \cdot \cos(\pi x)$   
 Για  $x = -1$  έχω  $f'((-1)^3) \cdot 3(-1)^2 = \pi \cdot \cos(\pi) \implies f'(-1) \cdot 3 = -\pi \implies$   
 $f'(-1) = -\frac{\pi}{3}$

### Θέμα 8°

Να βρείτε πολυώνυμο  $P(x)$  τέτοιο ώστε  $(P'(x))^2 = P(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $P'(0) = 1$

Έστω  $P(x)$  βαθμού  $v$ . Τότε  $P'(x)$  βαθμού  $v-1$   
 και  $(P'(x))^2$  βαθμού  $2 \cdot (v-1) = 2v-2$

Αφού  $(P'(x))^2 = P(x)$  πρέπει  $2v-2 = v \implies \boxed{v=2}$

οπότε  $P(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$

$P'(x) = 2ax + b$   $P'(0) = 1 \implies \boxed{b=1}$

Επίσης  $(P'(x))^2 = P(x) \implies (2ax + b)^2 = ax^2 + bx + \gamma \implies$

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = ax^2 + bx + \gamma$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Πρέπει να αρκεί  $4a^2 = a$  και  $4ab = b$  και  $b^2 = \gamma \xrightarrow{b=1}$   
 $a=0$  ή  $a=\frac{1}{4}$   $4a=1$   $\boxed{1=\gamma}$   
 αφού  $a \neq 0$   $a = \frac{1}{4}$

Τελικά  $P(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$