

Παρατηρήσεις για τη εφαπτομένη

Έστω μια συνάρτηση f και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο χ_χ , τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι (ε) : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

1. Η (ε) είναι παράλληλη στο $\chi\chi'$ $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0$
2. Η (ε) σχηματίζει με $\chi\chi'$ γωνία $\omega \neq 90^\circ$ $\Leftrightarrow f'(x_0) = \varepsilon\varphi\omega$
3. Η (ε) σχηματίζει με $\chi\chi'$ οξεία γωνία $\Leftrightarrow f'(x_0) > 0$
4. Η (ε) σχηματίζει με $\chi\chi'$ αμβλεία γωνία $\Leftrightarrow f'(x_0) < 0$
5. Η (ε) είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi = \lambda\chi + \beta$ $\Leftrightarrow f'(x_0) = \lambda$
6. Η (ε) είναι κάθετη στην ευθεία $\psi = \lambda\chi + \beta$ $\Leftrightarrow f'(x_0) \cdot \lambda = -1$
7. Η (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων $\Leftrightarrow x_0 \cdot f'(x_0) = f(x_0)$

8. Σε ασκήσεις όπου δεν δίνεται το σημείο επαφής, το θεωρούμε εμείς ως $(x_0, f(x_0))$, γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ και από τις απαιτήσεις του προβλήματος

βρίσκουμε τις τιμές του x_0 $\rightarrow y = \underbrace{f'(x_0)}_A \cdot x + \underbrace{f(x_0) - x_0 f'(x_0)}_B$

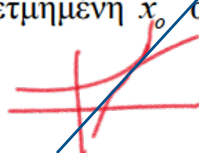
9. Έλεγχος αν μια δοσμένη ευθεία εφάπτεται στην C_f

Η ευθεία (η) $\psi = \lambda\chi + \beta$ εφάπτεται της C_f αν και μόνο αν υπάρχει $x_0 \in D_f$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = \lambda$ και $(x_0, f(x_0)) \in (\eta)$ δηλαδή $f(x_0) = \lambda \cdot x_0 + \beta$

10. Η C_f εφάπτεται στον $\chi\chi'$ αν και μόνο αν υπάρχει $x_0 \in D_f$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$ και $f(x_0) = 0$

11. Κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο δύο γραφικών παραστάσεων

Έστω δύο συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 . Οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη x_0 αν και μόνο αν ισχύει ότι $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$



$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

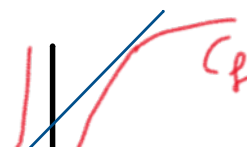
$$y = g'(x_0) \cdot x + g(x_0) - x_0 g'(x_0)$$

12. Κοινή εφαπτομένη σε μη κοινό σημείο δύο γραφικών παραστάσεων

Έστω δύο συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη αν και μόνο αν υπάρχουν σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, g(x_2))$ τέτοια ώστε η ευθεία $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ να ταυτίζεται με την ευθεία

$y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2)$ που ισοδύναμα σημαίνει ότι :

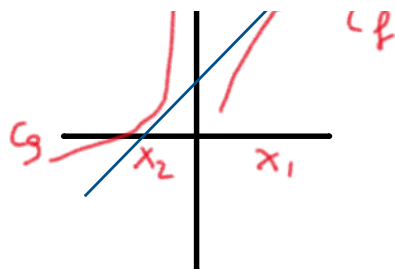
$$f'(x_1) = g'(x_2) \text{ και } f(x_1) - x_1 f'(x_1) = g(x_2) - x_2 g'(x_2)$$



$$f'(x_1) = g'(x_2) \text{ και } f(x_1) - x_1 f'(x_1) = g(x_2) - x_2 g'(x_2)$$

$$\varepsilon_f: y = f'(x_1) \cdot x + f(x_1) - x_1 f'(x_1)$$

$$\varepsilon_g: y = g'(x_2) \cdot x + g(x_2) - x_2 g'(x_2)$$



Σύμφωνα με το 110

3. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της παραβολής $y = x^2$ στα οποία οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης να είναι μεταξύ τους παράλληλες. Ισχύει το ίδιο για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$;

$$\text{Έστω } g(x) = x^2$$

Εξετάζω αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in D_g = \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$g'(x_1) = g'(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Συνεπώς δεν υπάρχουν.

Όμοια για την $f(x) = x^3$

$$f'(x_1) = f'(x_2) \Leftrightarrow 3x_1^2 = 3x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = x_2 \text{ ή } x_1 = -x_2$$

Συνεπώς υπάρχουν σε σημεία με αντίθετες τετμημένες

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A(\xi, f(\xi))$, $\xi \neq 0$ της γραφικής παράστασης της f . Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(-\xi, 0)$ εφάπτεται της C_f στο A .

Α.Σ.Σ. ∪ εφαπτομένη (ε) της C_f στο A τανύζεται με την AB

$$(ε): y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Rightarrow y - \sqrt{\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}(x - \xi) \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \cdot x + \sqrt{\xi} - \frac{\xi}{2\sqrt{\xi}} \Rightarrow y = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \cdot x + \sqrt{\xi} - \frac{\sqrt{\xi}}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} x + \frac{\sqrt{\xi}}{2}$$

$$\alpha_{AB} = \frac{0 - f(\xi)}{-\xi - \xi} = \frac{-\sqrt{\xi}}{-2\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$$

$$\therefore \alpha_{AB} = \alpha_{(ε)} \Rightarrow y = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} x + \frac{\sqrt{\xi}}{2}$$

$$AB: y - y_B = m_{AB}(x - x_B) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x + 5) \Rightarrow y = \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{5}}{2}$$