Μάθημα 56ο -Εφαπτομένη γραφικής παράστασης

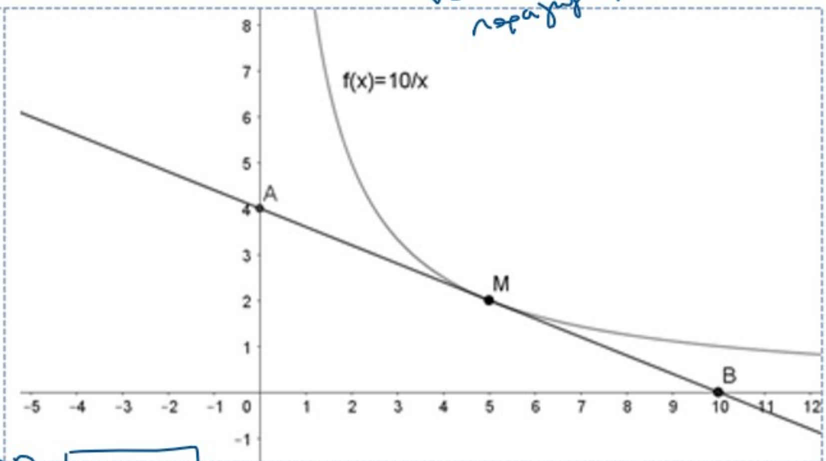
Θέμα 1ο Ερωτήσεις Σ – Λ

1. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f, η εφαπτομένη της σε κάθε σημείο της γραφικής της παράστασης έχει με αυτήν μόνο ένα κοινό σημείο, που είναι το σημείο επαφής. Λ
2. Αν μία ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μόνο ένα κοινό σημείο τότε απαραίτητα είναι εφαπτομένη της στο κοινό τους σημείο. Λ
3. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f, η εφαπτομένη της σε κάθε σημείο της γραφικής της παράστασης αφήνει ολόκληρη τη γραφική παράσταση σε ένα από τα δύο ημιεπίπεδα, στα οποία χωρίζει το επίπεδο η εφαπτομένη αυτή. Λ
4. Υπάρχει συνάρτηση της οποίας η εφαπτομένη σε κάποιο σημείο της έχει άπειρα κοινά σημεία με αυτή. Σ
5. Αν οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων τέμνονται, τότε στο κοινό τους έχουν απαραίτητα κοινή εφαπτομένη. Λ
6. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη x_o, σχηματίζει με τον xx' αμβλεία γωνία, τότε $f'(x_o)<0$. Σ
7. Η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\alpha x+\beta$, σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ορισμού της, συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Σ
8. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, τότε ορίζεται πάντα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη x_o. Λ Στο γωνιακό σημείο δεν έχει εφαπτομένη
9. Αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in D_f$ τότε δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f που να είναι παράλληλη στο xx'. Σ
10. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε αποκλείεται να έχει εφαπτομένη η C_f στο σημείο της με τετμημένη x_o. Λ μπορεί αλλά θα είναι κατακόρυφη

στο γωνιακό έχει εφαπτομένη χωρίς να είναι παραγωγίσιμη

Θέμα 2ο

Στο διπλανό σχήμα η εφαπτομένη της $f(x)=\dfrac{10}{x}, x>0$ στο σημείο της $M(x_o,f(x_o))$, τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(0,4), B(10,0)$. Να βρείτε την τιμή του x_o.



$f'(x)=\dfrac{-10}{x^2}$

$f'(x_0)=\lambda_{AB} \Leftrightarrow \dfrac{-10}{x_0^2}=\dfrac{4-0}{0-10}$

$4x_0^2=100 \Leftrightarrow x_0^2=25 \overset{x_0>0}{\Leftrightarrow} \boxed{x_0=5}$

Θέμα 3°

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 3x + 1$ (εφόσον υπάρχει), σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = 3. β) σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x΄x.

γ) είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 4$. δ) είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

ε) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x. στ) περνάει από το σημείο (- 1, 0).

Έστω $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής

α) $f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2x_0 - 3 = 3 \Leftrightarrow 2x_0 = 6 \Leftrightarrow x_0 = 3$

$f(x_0) = 3^2 - 3\cdot 3 + 1 = 1$ $\quad(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$y - 1 = 3(x - 3) \Rightarrow y = 3x - 8$

β) $f'(x_0) = \varepsilon\varphi 135° \Leftrightarrow 2x_0 - 3 = -1 \Leftrightarrow 2x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1$

$f(1) = -1$ $\quad(\varepsilon): y + 1 = -1(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = -x}$

γ) $f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow 2x_0 - 3 = 1 \Leftrightarrow 2x_0 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 2$

$f(2) = -1$ $\quad(\varepsilon): y + 1 = 1\cdot(x - 2) \Rightarrow \boxed{y = x - 3}$

δ) $f'(x_0)\cdot \frac{-1}{2} = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow 2x_0 - 3 = 2 \Leftrightarrow \boxed{x_0 = \frac{5}{2}}$

$(\varepsilon)\ y - f\left(\frac{5}{2}\right) = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)$

ε) $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{2}$

$(\varepsilon): y - f\left(\frac{3}{2}\right) = 0\left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = f\left(\frac{3}{2}\right)$

στ) $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - (x_0^2 - 3x_0 + 1) = (2x_0 - 3)(x - x_0)$

$(-1, 0) \in (\varepsilon) \Rightarrow 0 - (x_0^2 - 3x_0 + 1) = (2x_0 - 3)(-1 - x_0) \Leftrightarrow$

$-x_0^2 + 3x_0 - 1 = -2x_0 - 2x_0^2 + 3 + 3x_0 \Leftrightarrow$

$x_0^2 + 2x_0 - 4 = 0 \qquad \Delta = 20$

$x_0 = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$ $\quad -1 + \sqrt{5}$, $\ -1 - \sqrt{5}$

$\varepsilon_1: y - f(-1 + \sqrt{5}) = f'(-1 + \sqrt{5})(x + 1 - \sqrt{5})$

$\varepsilon_2: y - f(-1 - \sqrt{5}) = f'(-1 - \sqrt{5})(x + 1 + \sqrt{5})$

Θέμα 4°

Αν $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ να βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες η ευθεία $y = 2x - 1$ εφάπτεται της C_f στο (-1,f(-1)).

$f'(x) = 2x + \alpha$

[illegible] $(-1, f(-1))$ όταν η

$y = 2x - 1$ εφάπτεται της C_f στο $(-1, f(-1))$.

$f'(x) = 2x + \alpha$

Η εφαπτομένη της C_f στο $(-1, f(-1))$ είναι η

$(\varepsilon): y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Rightarrow y - (1 - \alpha + \beta) = (\alpha - 2)(x+1)$

$\Rightarrow y = (\alpha-2)x + \alpha - 2 + 1 - \alpha + \beta \Rightarrow y = (\alpha - 2)x + \beta - 1$

Πρέπει και αρκεί $\alpha - 2 = 2$ και $\beta - 1 = -1$

$\boxed{\alpha = 4}$ $\boxed{\beta = 0}$