

Μάθημα 57ο -Εφαπτομένη γραφικής παράστασης

Θέμα 5°

Να βρείτε τα κοινά σημεία των $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$ και να εξετάσετε αν έχουν κοινή εφαπτομένη στα κοινά τους σημεία.

Οι τετραψήφιες των κοινών σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 = x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0$$

$$x=0 \text{ ή } x=1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{για } x=0 : f(0)=0 \\ \text{για } x=1 : f(1)=1 \end{array} \right\} \text{ κοινά σημεία } A(0,0), B(1,1)$$

Θ1, εφαπτομένη των C_f, C_g στο $A(0,0)$ είναι

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma_1: y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y=0 \\ \Sigma_2: y - g(0) = g'(0)(x-0) \Rightarrow y=0 \end{array} \right\} \text{ οπότε } y=0 \text{ (} 0 < x' \text{)} \text{ είναι κοινή εφαπτομένη στο } A(0,0)$$

Θ1, εφαπτομένη των C_f, C_g στο $B(1,1)$ είναι

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma_1: y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y-1 = 3(x-1) \Rightarrow y = 3x-2 \\ \Sigma_2: y - g(1) = g'(1)(x-1) \Rightarrow y-1 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x-1 \end{array} \right\} \text{ οπότε δεν έχουν κοινή εφαπτομένη στο } B(1,1)$$

Θέμα 6°

Αν $f(x) = x^2 + ax + 9$ να βρείτε την τιμή του a ώστε η ευθεία $\psi = 2x$ να είναι εφαπτομένη της C_f . Για τη μεγαλύτερη από τις τιμές του a που βρήκατε,

να εξετάσετε αν η C_f και η γραφική παράσταση της $g(x) = -\frac{27}{x}$ στο κοινό τους

σημείο έχουν κοινή εφαπτομένη.

Αφού η $y=2x$ εφαπτομένη στο C_f υπάρχει $x_0 \in D_f$ τέτοιο ώστε η $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - x_0 f'(x_0)$

να ταυνίζεται με την $y=2x$.

Συνεπώς πρέπει και αρκεί $f'(x_0) = 2$ και $f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 0$

$$2x_0 + a = 2$$

$$\text{για } x_0 = 3 \rightarrow \boxed{a = -4}$$

$$\text{για } x_0 = -3 \rightarrow \boxed{a = 8}$$

$$x_0^2 + ax_0 + 9 - x_0(2x_0 + a) = 0$$

$$x_0^2 + ax_0 + 9 - 2x_0^2 - ax_0 = 0$$

$$x_0^2 = 9$$

$$x_0 = 3 \text{ ή } x_0 = -3$$

Θέμα 7°

Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = -x^2$ έχουν κοινή εφαπτομένη.

Εξετάζω αν υπάρχουν $x_1 \in D_f$ και $x_2 \in D_g$ ώστε οι

$$\Sigma_1: Y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Rightarrow Y = f'(x_1)x + f(x_1) - x_1 f'(x_1)$$

$$\Sigma_2: Y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Rightarrow Y = g'(x_2)x + g(x_2) - x_2 g'(x_2)$$

να ταυτίζονται

Πρέπει και αρκεί $f'(x_1) = g'(x_2)$ και $f(x_1) - x_1 f'(x_1) = g(x_2) - x_2 g'(x_2)$

$$2x_1 = -2x_2$$

$$\boxed{x_1 = -x_2} \quad \text{α)} \quad$$

$$x_1^2 + 1 - 2x_1^2 = -x_2^2 + 2x_2^2$$

$$1 - x_1^2 = x_2^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$1 - (-x_2)^2 = x_2^2 \Leftrightarrow$$

$$1 - x_2^2 = x_2^2 \Leftrightarrow$$

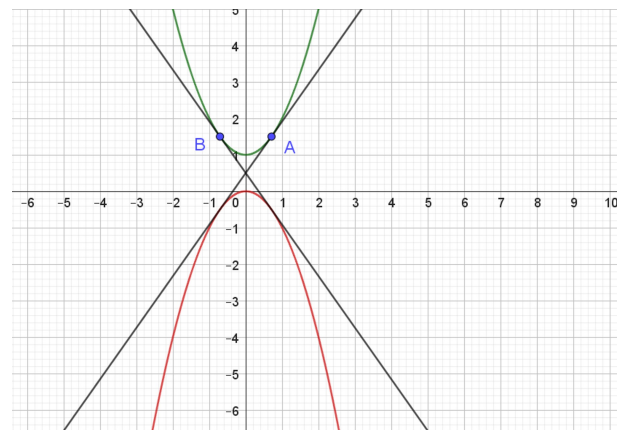
$$2x_2^2 = 1$$

$$x_2^2 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{ή} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{για } x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{για } x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



Θέμα 8°

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύει $f'(0) + f(0) < 1$ και $f(1) > 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$.

Α.ν.Σ.ο. υπάρχει $x_0 \in D_f = \mathbb{R}$ ώστε η $Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

να διέρχεται από το $A(1, 1)$ δηλαδή $1 - f(x_0) = f'(x_0)(1 - x_0) \Leftrightarrow$

$$1 - f(x_0) - f'(x_0)(1 - x_0) = 0$$

$$\text{Έστω } g(x) = 1 - f(x) - f'(x)(1 - x)$$

g συνεχής ως πράξη συνεχών

$$g(0) = 1 - f(0) - f'(0) > 0 \quad \text{αφού } f'(0) + f(0) < 1 \text{ από υπόθεση}$$

.....

$$g(\omega) = 1 - f(\omega) - f'(\omega) > 0 \quad \text{αφού } f'(\omega) + f(\omega) < 1 \text{ από υπόθεση}$$

$$g(1) = 1 - f(1) < 0 \quad \text{αφού } f(1) > 1 \text{ από υπόθεση}$$

Από Θ. Bolzano για τη g στο $[0,1]$ υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε
 $g(x_0) = 0 \Rightarrow 1 - f(x_0) - f'(x_0)(1 - x_0) = 0$

Θέμα 10°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $a \neq 0$ και $\beta^2 > 3a\gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει δύο οριζόντιες εφαπτομένες.

β) Αν $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ τα σημεία επαφής και M το μέσο του AB να αποδείξετε ότι

i) η κλίση στο M είναι ετερόσημη του a

ii) το M ανήκει στη γραφική παράσταση της f αλλά η εφαπτομένη της στο M δεν είναι η ευθεία AB .

α) Α.ν.Σ.ο η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει 2 ρίζες

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2\beta x + \gamma = 0$$

$$\Delta = 4\beta^2 - 12a\gamma = 4(\beta^2 - 3a\gamma) > 0$$

υπόκει έχει 2 ρίζες άνισες x_1, x_2

$$\beta) \quad M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\right)$$

$$\text{Από Vieta } x_1 + x_2 = -\frac{2\beta}{3a}$$

$$\boxed{\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{\beta}{3a}} \quad (1)$$

$$\text{α.ν.Σ.ο. } a \cdot f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow a \cdot f'\left(-\frac{\beta}{3a}\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$a \cdot \left(3a \frac{\beta^2}{9a^2} - \frac{2\beta^2}{3a} + \gamma\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{3} - \frac{2\beta^2}{3} + a\gamma < 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\beta^2}{3} + a\gamma < 0 \Leftrightarrow 3a\gamma - \beta^2 < 0 \text{ που ισχύει}$$