

Θέμα 9ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$, $g(x) = 2x^2$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εφαπτομένη (ε) δεν εφάπτεται στη γραφική παράσταση της g .

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο στο $(-\infty, 0)$ αλλά δεν έχουν κοινή εφαπτομένη σε αυτό.

δ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν δύο τουλάχιστον κοινές εφαπτομένες με τετμημένες στο $(0, +\infty)$.

α) Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής.

$$(ε): y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$(0, 0) \in (ε) \Rightarrow 0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow -e^{x_0} = e^{x_0}(-x_0) \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Συνεπώς το σημείο επαφής είναι $M(1, e)$, $(ε): y - e = e(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = e \cdot x}$

β) Αν η $y = e \cdot x$ ήταν εφαπτομένη της g , θα υπήρχε $x_1 \in \mathbb{R}$

τέτοιο ώστε η $(ε): y - g(x_1) = g'(x_1)(x - x_1) \Rightarrow y = g'(x_1)x + g(x_1) - x_1 g'(x_1)$

να ταυτίζεται με την $(ε): y = e \cdot x$ δηλαδή

$$g'(x_1) = e \quad \text{και} \quad g(x_1) - x_1 g'(x_1) = 0$$

$$4x_1 = e$$

$$2x_1^2 - x_1 \cdot 4x_1 = 0$$

$$x_1 = \frac{e}{4}$$

$$-2x_1^2 = 0$$

$$x_1 = 0$$

Αδυναμία

Συνεπώς η $y = e \cdot x$ δεν εφαπτομένη της g

γ) Α.ν.δ.ο. η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(-\infty, 0)$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^x = 2x^2 \Leftrightarrow e^x - 2x^2 = 0$$

Θαυρώ $h(x) = e^x - 2x^2$

η συνεχής στο $(-\infty, 0)$

για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ (1)

$$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow$$

$$-2x_1^2 < -2x_2^2 \quad (2)$$

$$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow x_1^+ > x_2^+ \Rightarrow$$

$$-2x_1^2 < -2x_2^2 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow e^{x_1} - 2x_1^2 < e^{x_2} - 2x_2^2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2) \Rightarrow h \uparrow (-\infty, 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$$

Συνεπώς $h((-\infty, 0)) = (-\infty, 1)$ οπότε υπάρχει $\tau_1 \in (-\infty, 0)$ με

$$h(\tau_1) = 0 \Rightarrow e^{\tau_1} = 2\tau_1^2 \quad \text{και λόγω μονotonίας μοναδικό.}$$

Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στα f & g θα έπρεπε

$$f'(\tau) = g'(\tau) \Rightarrow e^{\tau} = 4\tau, \quad \text{Από το οποίο}$$

$$\tau_1 \in (-\infty, 0) \Rightarrow 4\tau < 0 \quad \text{και} \quad e^{\tau_1} > 0$$

β) Αρκεί ν.σ.ο. να έχουμε 2 τοιαύτων f στην (a, b) ώστε

$$f'(a) = g'(b) \quad \text{και} \quad f(a) - a f'(a) = g(b) - b g'(b)$$

$$e^a = 4b$$

$$\boxed{b = \frac{e^a}{4}} \quad (1)$$

$$e^a - a e^a = 2b^2 - 4b^2$$

$$e^a(1-a) = -2b^2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$e^a(1-a) = -2 \frac{e^{2a}}{16} \Leftrightarrow$$

$$1-a = -\frac{e^a}{8} \Leftrightarrow \boxed{e^a + 8 - 8a = 0}$$

Θεωρώ $\varphi(x) = e^x + 8 - 8x, \quad x \geq 0$ ον ν.σ.ο.

$$\varphi(0) = 9 > 0$$

$$\varphi(2) = e^2 - 8 < 0$$

$$\varphi(5) = e^5 - 32 > 0$$

Από Θ.Β.Θ.ζου για το φ

στο $[0, 2]$ και $[2, 5]$

υπάρχουν $a_1 \in (0, 2)$ και $a_2 \in (2, 5)$

$$\text{με} \quad \varphi(a_1) = \varphi(a_2) = 0$$

4. Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ σε ένα σημείο της $M\left(\xi, \frac{1}{\xi}\right)$. Αν A, B είναι τα σημεία στα

οποία η ε τέμνει τους άξονες x' και y' αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι

- Το M είναι μέσο του AB .
- Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του $\xi \in \mathbb{R}^*$.

$$\varepsilon_M: y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Rightarrow y - \frac{1}{\xi} = -\frac{1}{\xi^2}(x - \xi) \Rightarrow$$

$$y = -\frac{1}{\xi^2}x + \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{\xi^2}x + \frac{2}{\xi}}$$

$$yy': \text{για } x=0 \rightarrow y = \frac{2}{\xi} \quad B(0, \frac{2}{\xi})$$

$$xx': \text{για } y=0 \rightarrow 0 = -\frac{1}{\xi^2}x + \frac{2}{\xi} \Rightarrow x = 2\xi \quad A(2\xi, 0)$$

$$\text{Το μέσο του } AB \text{ είναι το } \left(\frac{2\xi+0}{2}, \frac{\frac{2}{\xi}+0}{2}\right) \rightarrow \left(\xi, \frac{1}{\xi}\right)$$

δηλαδή το M

$$(OAB) = \frac{1}{2} |\det(\vec{OA}, \vec{OB})| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 2\xi & 0 \\ 0 & \frac{2}{\xi} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot |4| = 2 \text{ ε.μ.}$$

3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3$ σε οποιοδήποτε σημείο της $M(a, a^3)$, $a \neq 0$ έχει με αυτήν και άλλο κοινό σημείο N εκτός του M . Στο σημείο N η κλίση της C_f είναι τετραπλάσια της κλίσης της στο M .

$$(\varepsilon): y - f(a) = f'(a)(x - a) \Rightarrow y - a^3 = 3a^2(x - a) \Rightarrow \boxed{y = 3a^2x - 2a^3}$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow 3a^2x - 2a^3 = x^3 \Leftrightarrow x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0 \Leftrightarrow (x-a)(x^2 + ax - 2a^2) = 0$$

$$x = a \text{ ή } x = a \text{ ή } x = -2a$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & -3a^2 & 2a^3 \\ & 1 & a^2 & -2a^3 \\ \hline 1 & a & -2a^2 & 0 \end{array}$$

Το άλλο κοινό σημείο είναι $(-2a, f(-2a))$

a.v.80 $f'(-2a) = 4 f'(a) \Leftrightarrow 3(-2a)^2 = 4 \cdot 3a^2 \Leftrightarrow 12a^2 = 12a^2$
nun ist ja