Μάθημα 59ο -Κανόνες De L' Hospital

Θέμα 1ο Να βρείτε τα παρακάτω όρια

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$ γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2x-2-x^2}{x^3}$ δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x\cdot e^x)$ ε) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ ζ) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})$ η) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2}=+\infty$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2x-2-x^2}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2-2x}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2}{6x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x}{6}=\dfrac{1}{3}$

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\cdot e^x\overset{-\infty\cdot 0}{=\!=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{-\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}$ σταματάω διότι είναι πιο σύνθετο από το αρχικό

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=\!=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-e^x)=0$

ε) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{1}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{-x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}$ σταματάω διότι είναι πιο σύνθετο απ' το αρχικό

Θέτω $\frac{1}{x}=u$, $x\to 0^-$, $u\to-\infty$: $\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{e^u}{\frac{1}{u}}=\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{u}{e^{-u}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=\!=}\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-u}}=0$

στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)\overset{+\infty-(+\infty)}{=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-\dfrac{\ln x}{x})=+\infty$ διότι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$

$x \to +\infty \qquad x \qquad x \to +\infty \qquad 1$

ζ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$

η) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\overset{1^{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=$

θέτω $x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=u$ $\quad \lim\limits_{u\to 1}e^u=e$, αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\overset{\frac{1}{x}=w}{=}\lim\limits_{w\to 0}\frac{\ln(1+w)}{w}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{w\to 0}\frac{\frac{1}{1+w}}{1}=1$

Θέμα 2ο

Α) Να αποδείξετε ότι :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ β) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$ γ) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\ln x)=0$

Β) Με τη βοήθεια των παραπάνω ορίων να βρείτε τα παρακάτω όρια

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\eta\mu x}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x\cdot\ln x)$ γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{\eta\mu^5 x\cdot\ln^3 x}$ δ) $\lim\limits_{x\to 0}x^x$ ε) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\eta\mu x}$

Α) α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)\overset{0(-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{-x}=\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0$

(λόγω $\ln x$, $x>0$ άρα $x\to 0^+$

Β) α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=\frac{1}{1}=1$

β) $\lim\limits_{x\to 0}(ημx\cdot \ln x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{ημx}{x}\cdot x\ln x\right) = 1\cdot 0 = 0$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{ημ^5x\cdot \ln^3 x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2}{\left(\frac{ημx}{x}\right)^5 (x\ln x)^3} = -\infty$

για $x\to 0^+$, $x>0$, $\ln x<0 \longrightarrow x\ln x<0$

και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημx}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{(x\ln x)^3}=-\infty$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}x^x \overset{0^0}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln x} = \lim\limits_{u\to 0} e^u = 1$

Θέτω $x\ln x = u$, για $x\to 0$ και $u\to 0$

ε) $\lim\limits_{x\to 0}x^{ημx} = \lim\limits_{x\to 0} e^{ημx\cdot\ln x} = \lim\limits_{u\to 0}e^u = 1$

Θέτω $ημx\cdot\ln x = u$, για $x\to 0$ και $u\to 0$

Θέμα 3°

Έστω συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ παραγωγίσιμη με $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(0)=2$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+x^2}{1-συνx}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot f(x)+1-συνx}{x^2+f(x)}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Λάθος

f συνεχής στο 0 οπότε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$

f' παραγωγίσιμη στο 0 άρα και συνεχής οπότε $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)=0$

Δεν μπορώ να κάνω το De L'hospital διότι δεν γνωρίζω ότι f 2 φορές παραγωγίσιμη

Συνέχεια $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \frac{1}{2}f''(0) = \frac{1}{2}2 = 1$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+x^2}{1-συνx} \overset{\frac{0}{0}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)+2x}{ημx} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f'(x)}{x}+\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}}{\frac{ημx}{x}} = \frac{f''(0)+2}{1} = 4$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x f(x) + 1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2 + f(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) + x f'(x) + \eta\mu x}{2x + f'(x)} =$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{f(x)}{x} + f'(x) + \frac{\eta\mu x}{x}}{2 + \frac{f'(x)}{x}} = \dfrac{f'(0) + f'(0) + 1}{2 + f''(0)} = \dfrac{1}{4}$

Θέμα 4ο

Έστω συνάρτηση f 2 φορές παραγωγίσιμη στο R . Να δείξετε ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-4f(x)+3f(x-h)}{h^2}=6f''(x)$$

παραγωγίζω ως προς h οπότε f(x) αριθμός

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+3h) - 4f(x) + 3f(x-h)}{h^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(x+3h)\cdot(x+3h)' - 0 + 3f'(x-h)(x-h)'}{2h}$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3f'(x+3h) - 3f'(x-h)}{2h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{9f''(x+3h) + 3f''(x-h)}{2}$

όμως δεν μπορώ να βάλω όπου h το 0 διότι δεν ξέρω ότι η f'' είναι συνεχής

↳ δεν βγαίνει

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{f'(x+3h) - f'(x)}{h} - \dfrac{f'(x-h) - f'(x)}{h}\right) =$

$\dfrac{3}{2}\left(3f''(x) - (-f''(x))\right) = 6f''(x)$ διότι

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(x+3h) - f'(x)}{h} \overset{3h=u}{=} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{f'(x+u) - f'(x)}{\frac{u}{3}} = 3f''(x)$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(x-h) - f'(x)}{h} \overset{-h=u}{=} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{f'(x+u) - f'(x)}{-u} = -f''(x)$

Θέμα 5ο

Έστω συνάρτηση f 3 φορές παραγωγίσιμη στο R . Να δείξετε ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{3f(x+h)-3f(x-h)-6h\cdot f'(x)}{h^3}=f^{(3)}(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{3f(x+h)-3f(x-h)-6h\cdot f'(x)}{h^3}=f^{(3)}(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{3f(x+h)-3f(x-h)-6h\cdot f'(x)}{h^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{3f'(x+h)(x+h)'-3f'(x-h)(x-h)'-6f'(x)}{3h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3f'(x+h)+3f'(x-h)-6f'(x)}{3h^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{3f''(x+h)\cdot 1+3f''(x-h)(-1)-0}{6h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3}{6}\left(\frac{f''(x+h)-f''(x-h)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}-\frac{f''(x-h)-f''(x)}{h}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(f^{(3)}(x)-(-f^{(3)}(x))\right)=f^{(3)}(x)$$