

Μάθημα 60ο - Ρυθμός μεταβολής

5. Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \frac{1}{4}x^2$, $x \geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y , αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Έστω $M(x(t), y(t))$, $x(t) \geq 0$

$x(0) = 0$, $y(0) = 0$ (αφού ξεκινά από το $(0,0)$)

$$M \in C \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{4}x^2(t)} \quad (1)$$

$$x(t_0) = j$$

$$y(t_0) = j$$

$$\text{ώστε } \boxed{x'(t_0) = y'(t_0)} \quad (2)$$

Παραγωγίζοντας την (1) ως προς t έχω

$$y'(t) = \frac{1}{4} 2x(t) \cdot x'(t)$$

για $t = t_0$ έχω $y'(t_0) = \frac{1}{2} x(t_0) x'(t_0) \xrightarrow{(2)}$

$$x'(t_0) = \frac{1}{2} x(t_0) x'(t_0) \xrightarrow{x'(t_0) > 0} 1 = \frac{1}{2} x(t_0) \Rightarrow x(t_0) = 2$$

(1) $\Rightarrow y(t_0) = 1$
Άρα $M_0(2,1)$

8. Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Καθώς περνάει από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A .

Έστω $M(x(t), y(t))$ το κινητό.

$$M \in C \Rightarrow \boxed{x^2(t) + y^2(t) = 1} \quad (1)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 $M \equiv A$ ^{επιστημονικά} αφού $x(t_0) = \frac{1}{2}$, $y(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$y'(t_0) = -3 \text{ μον/sec}$$

$$x'(t_0) = ?$$

$$y'(t_0) = -3 \text{ } \mu\text{W/sec}$$

$$x'(t_0) = j$$

Παραγωγίζω την (1) ως προς t :

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$

$$\text{για } t = t_0 \text{ έχω } 2x(t_0)x'(t_0) + 2y(t_0)y'(t_0) = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} x'(t_0) + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-3) = 0 \Rightarrow x'(t_0) = 3\sqrt{3} \text{ } \mu\text{W/sec}$$