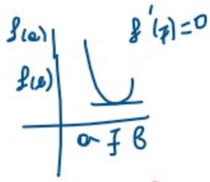
Μάθημα 63ο- Θεώρημα Rolle

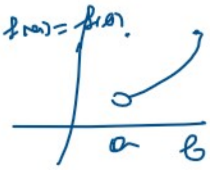
Θέμα 1º



1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και f (α) ≠ f (β), α, β ∈ R, α < β, τότε ισχύει f ΄ (x) ≠ 0 για κάθε x ∈ (α, β). Λ

2. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] και f (α) = f (β), τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x_0 εσωτερικό του διαστήματος [α, β], στο οποίο η εφαπτομένη του διαγράμματος της f είναι παράλληλη στον άξονα x΄x. Σ

3. Αν ισχύει f ΄ (x_o) = 0 για κάποιο x_o ∈ (α, β), τότε απαραίτητα είναι f (α) = f (β). Λ



f'(x) ≠ 0
x∈(α,β)

4. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και f (α) = f (β), τότε σίγουρα υπάρχει x_o ∈ (α, β) τέτοιο ώστε f ΄ (x_o) = 0. Λ

5. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και f (α) = f (β) και f ΄ (x) ≠ 0 για κάθε x ∈ (α, β) τότε $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) \neq f(\alpha)$ ή $\lim_{x\to\beta^-} f(x) \neq f(\beta)$. Σ

↳ δεν ισχύει το συμπέρασμα του Rolle και επειδή f(α)=f(β) και f παραγωγίσιμη στο (α,β) άρα και συνεχής στο (α,β) όχι όμως συνεχής στο [α,β]

Θέμα 2º

Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Re$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει στο $\Re$ μία τουλάχιστον ρίζα σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις :

α) η f είναι άρτια

β) η f δεν είναι 1-1

γ) δεν υπάρχει x_o∈(α, β) τέτοιο ώστε $f(x_o)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

α) f άρτια → f(−x) = f(x), για κάθε x∈R

Έστω α>0 τότε −α<0 και f(α) = f(−α) και επειδή

f παραγωγίσιμη στο R άρα και στο [−α,α] οπότε και συνεχής

από Rolle υπάρχει $x_0 \in (-\alpha,\alpha)$ με $f'(x_0)=0$

β) f όχι 1-1 ⇒ υπάρχουν $x_1, x_2 \in D_f = R$ με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1)=f(x_2)$

Έστω $x_1<x_2$ Από Rolle για την f στο $[x_1,x_2]$ υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ με $f'(\xi)=0$

$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ είναι μεταξύ των f(α), f(β)

γ) Αν f(α) ≠ f(β) τότε από Θ.Ε.Τ. θα υπάρχε $x_0 \in (\alpha,\beta)$ με

$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ είναι μεταξύ των $f(\alpha), f(\beta)$

γ) Αν $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε από Θ.Ε.Τ. θα υπήρχε $x_0 \in (\alpha,\beta)$ με $f(x_0) = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ Άτοπο αφού δεν υπάρχει τέτοιο x_0

Συνεπώς $f(\alpha)=f(\beta)$ οπότε από Θ.Rolle υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ με $f'(\xi)=0$