

Θέμα 3°

Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

- α) η f έχει το πολύ μία ρίζα
- β) η f είναι αντιστρέψιμη
- γ) η f παίρνει όλες τιμές μεταξύ των $f(\alpha), f(\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta$.

f παραγωγ. στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεκ.

α) Ξούω ότι η f είχε 2 ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$
 Τότε $f(x_1) = f(x_2) = 0$ οπότε από Rolle για την f στο $[x_1, x_2]$
 Θα υπήρχε $x_0 \in (x_1, x_2)$ με $f'(x_0) = 0$ Άρα, αφού $f'(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$
 Άρα η f δεν μπορεί να έχει 2 ρίζες, οπότε έχει το πολύ μία

β) Α.ν.Σ. $\delta: 1-1$

Ξούω ότι η f δεν είναι $1-1$, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με
 $x_1 \neq x_2$ (έστω $x_1 < x_2$) και $f(x_1) = f(x_2)$
 Τότε από Rolle για την f στο $[x_1, x_2]$ θα υπήρχε $x_0 \in (x_1, x_2)$
 με $f'(x_0) = 0$. Άρα, αφού $f'(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$
 Άρα $\delta: 1-1$ οπότε f αντιστρέψιμη.

γ) f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) \neq 0$ οπότε $f(a) \neq f(b)$ για κάθε $a \neq b$
 Αφού $f(a) \neq f(b)$, f συνεκ. στο $[a, b]$ από Θ.Ε.Τ. η f παίρνει όλες
 τιμές μεταξύ των $f(a), f(b)$.

Θέμα 4°

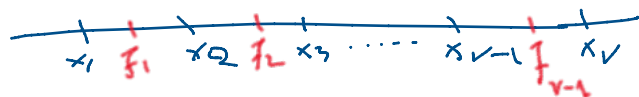
Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε κάθε μια από τις παρακάτω βασικές προτάσεις :

- α) Μεταξύ δύο ριζών της f υπάρχει σίγουρα μία ρίζα της f' .
- β) Αν η f έχει n διαφορετικές ρίζες τότε η f' έχει σίγουρα $n-1$ ρίζες.
- γ) Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' υπάρχει μία το πολύ ρίζα της f .
- δ) Αν η f' έχει n ακριβώς ρίζες τότε η f έχει το πολύ $n+1$ ρίζες.
- ε) Αν $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f έχει το πολύ 2 ρίζες.

f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεκ.

α) Έστω ότι n f έχει 2 ρίζες z_1, z_2 με $x_1 < x_2$
 Τότε $f(x_1) = f(x_2) = 0$ οπότε από Rolle για την f στο $[x_1, x_2]$
 υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ με $f'(x_0) = 0$
 ↳ ένα ταξίδισμα

β) Έστω $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, n διαφορετικές ρίζες του f



Από Rolle για την f σε κάθε ένα από τα $[x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{r-1}, x_r]$
 υπάρχουν $f_1 \in (x_1, x_2), f_2 \in (x_2, x_3), \dots, f_{r-1} \in (x_{r-1}, x_r)$

$$\text{με } f'(f_1) = f'(f_2) = \dots = f'(f_{r-1})$$

γ) Έστω $f_1 < f_2$ 2 διαφορετικές ρίζες του f' , δηλαδή

$$f'(f_1) = f'(f_2) = 0 \quad \text{και} \quad f'(x) \neq 0, x \in (f_1, f_2)$$

Αν n f είχε 2 ρίζες $z_1, z_2 \in (f_1, f_2)$ με $x_1 < x_2$ τότε
 από Rolle ^{για την f στο $[x_1, x_2]$} θα υπήρχε $\xi \in (x_1, x_2) \subset (f_1, f_2)$ με $f'(\xi) = 0$. Άρα
 αφού $f'(x) \neq 0, x \in (f_1, f_2)$. Άρα n f έχει το πολύ 1 ρίζα στο (f_1, f_2)

δ) Έστω ότι n f είχε $v+2$ ρίζες. Τότε από το β) n f' θα είχε
 ταξίδισμα $v+1$ ρίζες. Άρα αφού n f' έχει ακριβώς v ρίζες.
 Άρα n f έχει το πολύ $v+1$ ρίζες.

ε) Έστω ότι n f είχε 3 ρίζες z_1, z_2, z_3 με $x_1 < x_2 < x_3$
 Τότε από Rolle για την f στο $[x_1, x_2]$ και στο $[x_2, x_3]$ θα υπήρχαν
 $f_1 \in (x_1, x_2), f_2 \in (x_2, x_3)$ με $f'(f_1) = f'(f_2) = 0$ και από Rolle για
 την f' στο $[f_1, f_2]$ θα υπήρχε $\xi \in (f_1, f_2)$ με $f''(\xi) = 0$
 Άρα αφού $f''(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$
 Συνεπώς n f έχει το πολύ 2 ρίζες.

Εφαρμογές :

α) Η εξίσωση $x^3 + 2x^2 + 4x + \alpha = 0$ δεν μπορεί να έχει 2 ρίζες στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

β) Αν η εξίσωση $x^3 + ax^2 + bx + \gamma = 0$ έχει 3 ρίζες τότε $a^2 > 3\beta$.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x(x-2)(x-3)(x-4)$. Να

αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες.

δ) οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = 2^x$ και $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ έχουν ακριβώς

δύο κοινά σημεία τα $A(0,1)$ και $B(1,2)$.

α) Έστω $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + \alpha$ Παραγωγίζω σωβωρ πολυωνυμικά
άρα και συνεχώς, με $f'(x) = 3x^2 + 4x + 4$ που είναι τριώνυμο
με $\Delta < 0$, οπότε $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και άρα η f έχει
το πολύ 1 ρίζα.

β) Έστω $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + \gamma$ Παραγωγίζω σωβωρ πολυωνυμικά
άρα και συνεχώς, με $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ που είναι τριώνυμο
με $\Delta = 4a^2 - 12b$.

Αφού η f έχει 3 ρίζες η f' θα έχει σίγουρα 2 ρίζες (και
μάλιστα αφού f' τριώνυμο ακριβώς 2) οπότε $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 12b > 0 \Leftrightarrow \boxed{a^2 > 3b}$

γ) $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 0$ οπότε η $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον
3 ρίζες. Όμως f πολυώνυμο 4ου βαθμού, οπότε f' πολυώνυμο
3ου βαθμού και άρα η f' δεν μπορεί να έχει περισσότερες από 3 ρίζες
Συνεπώς η f' έχει ακριβώς 3 ρίζες

δ) $f(0) = g(0) = 1$, $f(1) = g(1) = 2$ οπότε $A(0,1)$, $B(1,2)$ είναι κοινά
σημεία των f, g

$$\text{Θαυρή } h(x) = f(x) - g(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$$

$$h'(x) = 2^x \cdot \ln 2 + 2x - 2$$

$h''(x) = 2^x (\ln 2)^2 + 2 \neq 0$ οπότε η h έχει το πολύ 2 ρίζες
Συνεπώς f, g έχουν 2 ακριβώς κοινά σημεία τα A, B

Θέμα 5^ο (1 Β' ομάδας σχολικού σελ. 131)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$ και μια, τουλάχιστον, στο διάστημα $(0, 1)$.
ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

i) f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική

$$f(-1) = 1 + 20 - 25 + 1 + 1 = -2 < 0$$

$$f(0) = 1 > 0$$

$$f(1) = 1 - 20 - 25 - 1 + 1 = -44 < 0$$

Από θ. Bolzano για την f στο $[-1, 0]$ και στο $[0, 1]$ υπάρχουν

$x_1 \in (-1, 0)$ και $x_2 \in (0, 1)$ με

$$f(x_1) = f(x_2) = 0$$

ii) Από Rolle για την f στο $[x_1, x_2]$ υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subset (-1, 1)$

$$\text{με } f'(\xi) = 0 \Rightarrow 4\xi^3 - 60\xi^2 - 50\xi - 1 = 0$$

Θέμα 6^ο (2 Β' ομάδας σχολικού σελ. 132)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\eta\mu x$. Να αποδείξετε ότι:

- i) Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$.
ii) Η εξίσωση $\epsilon\phi x = 1 - x$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$

f παραγωγισιμή στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγισίμων, άρα και συνεχής

$$f(1) = (1-1) \cdot \eta\mu 1 = 0$$

$$f(0) = (0-1) \cdot \eta\mu 0 = 0$$

Από Rolle για την f στο $[0, 1]$ υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ με $f'(\xi) = 0 \Rightarrow 1 \cdot \eta\mu \xi + (\xi-1) \epsilon\phi \xi = 0$

$$\eta\mu \xi = -(\xi-1) \epsilon\phi \xi \xrightarrow[\epsilon\phi \xi \neq 0]{\xi \in (0, \pi/2)} \frac{\eta\mu \xi}{\epsilon\phi \xi} = -(\xi-1) =$$

$$\boxed{\cot \xi = 1 - \xi}$$

Θέμα 7^ο (3 Β' ομάδας σχολικού σελ. 132)

- i) Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x) \neq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.
- ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu \frac{x}{2} = x$ αληθεύει μόνο για $x = 0$.

i) Θεωρώ $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως φάρμα παραγωγισίμων άρα και συνεχώς

$$g'(x) = f'(x) - 1 \neq 0, x \in \mathbb{R} \text{ αφού } f'(x) \neq 1, x \in \mathbb{R}$$

Αφού $g'(x) \neq 0$ η g έχει 1 το πολύ ρίζα, οπότε και η εξίσωση $f(x) = x$ 1 το πολύ ρίζα

ii) για $x=0$ έχω $\eta\mu 0 = 0$ που ισχύει οπότε έχει ρίζα η $x=0$

$$\text{Θεωρώ } h(x) = \eta\mu \frac{x}{2} - x, h'(x) = \frac{\cos \frac{x}{2}}{2} - 1 = \frac{\cos \frac{x}{2} - 2}{2} < 0 \text{ και άρα}$$

η h έχει το πολύ μία ρίζα.

Συνεπώς η εξίσωση $\eta\mu \frac{x}{2} = x$ αληθεύει μόνο για $x=0$.