

Μάθημα 65ο- Θεώρημα Rolle

Θέμα 8ο

Εστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[α,β]$ για την οποία ισχύει $\ln \frac{f(β)}{f(α)} = α^2 - β^2$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) + 2\xi f(\xi) = 0$.

↳ now $g(x) = e^{x^2} \cdot f(x)$, $x \in [a, b]$

9. Դիտարկենք $\alpha \in [a, b]$ և ճշգրիտ
 դիտարկենք, թե քան ընդհանուր

$$\left. \begin{aligned} g(a) &= e^{a^2} f(a) \\ g(b) &= e^{b^2} f(b) \end{aligned} \right) \begin{aligned} g(a) &= g(b) \Leftrightarrow \\ e^{a^2} f(a) &= e^{b^2} f(b) \Leftrightarrow \\ \frac{f(b)}{f(a)} &= e^{a^2 - b^2} \end{aligned}$$

$$\ln \frac{f(\theta)}{f(\phi)} = a^2 - b^2$$

Anno Rolle für u, v, g in $[a, b]$
 unäusser $f \in (a, b)$ & $g'(f) = 0 \Rightarrow$

$$2f \cdot e^{f^2} f'(r) + e^{f^2} f''(r) = 0$$

$$2zf(z) + f'(z) = 0$$

107 2025
ערפערט זיך

$$f'(x) + 2x f(x) = 0$$

$$e^{x^2} f'(x) + 2x e^{x^2} f(x) = 0$$

$$(e^{x^2} f(x))' = 0$$

2004

$$\ln \frac{f(b)}{f(a)} = a^2 - e^2$$

$$\frac{f(\theta)}{f(0)} = e^{a^2 - \theta^2}$$

$$\frac{f(\theta)}{f(0)} = \frac{e^{a^2}}{e^{0^2}}$$

$$e^{b^2} f(b) = e^{a^2} \cdot f(a)$$

Θέμα 9^ο

Εστω συνάρτηση $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν τα
 εξής: $f(1)=2+f(0)$, $f'(0)>0$ και $f''(x) \neq 5$ για κάθε $x \in (0,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 4\xi$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 5x_0$.

a) $f'(x) = 4x \iff g'(x) - 4x = 0 \iff (f(x) - 2x^2)' = 0$

Θεωρώ $g(x) = f(x) - 2x^2$ ορισμένη στο $[0, 1]$ από και συνεχής

$$\begin{array}{l} g(1) = f(1) - 2 \\ g(0) = f(0) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} f(1) = 2 + f(0) \\ \hline \hline \end{array} \right. \quad g(1) = g(0)$$

Ans Rolle für g ist $[0,1]$ und $\forall x \in (0,1) \neq$

$$g'(\xi) = 0 \Rightarrow \boxed{f'(\xi) = 4\xi}$$

$$n' = 0, \quad \delta'(x) - \delta x = 0$$

$$\beta) f(x) = 5x \Rightarrow f'(x) - 5x = 0$$

Θεωρώ $h(x) = f'(x) - 5x$, συνεχής στο $[0,1]$ αφού
 f 2 φορές παραγωγιστήν άρα f' συνεχής.

$$h(0) = f'(0) = 0 > 0$$

$$h(1) = f'(1) - 5 = 4 - 5 = -1 < 0, \text{ αφού } f \in C(0,1)$$

Από Θ. Bolzano για την h στο $[0,1]$ υπάρχει $x_0 \in (0,1) \subset (0,1)$
 $\mu \epsilon h(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 5x_0$

Αν υπήρχαν $x_1, x_2 \in (0,1)$ $\mu \epsilon h(x_1) = h(x_2) = 0$ τότε

από Rolle θα υπήρχε $\xi \in (x_1, x_2)$ $\mu \epsilon h'(\xi) = 0 \Rightarrow$

$$f''(\xi) - 5 = 0 \Rightarrow f''(\xi) = 5$$

Αλλά αφού $f''(x) \neq 5$

Συνεπώς η h έχει ακριβώς μία ρίζα.

Θέμα 10^ο

Εστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ με $f(2) = 2 \cdot f(1)$ και $f''(x) \neq 0$ για
κάθε $x \in (1,2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1,2)$ ώστε η
εφαπτομένη στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Α.ν.Σ.ο. υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε

$$\eta \text{ (ε)}: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ να διέρχεται από το } (0,0)$$

$$\text{δηλαδή } 0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 0$$

$$\text{Θεωρώ } g(x) = \frac{f(x)}{x}, x \in [1,2]$$

g παραγωγιστήν στο $[1,2]$ ως πηλίκο
παραγωγιστών άρα και συνεχής

$$g(2) = \frac{f(2)}{2} \quad \left| \begin{array}{l} f(2) = 2f(1) \\ \hline \end{array} \right. \quad g(1) = g(2)$$

$$g(1) = f(1)$$

$$\left(\begin{array}{l} f(x) - x f'(x) = 0 \\ \frac{f(x) - x f'(x)}{x^2} = 0 \\ \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0 \end{array} \right.$$

Από Rolle για την g στο $[1,2]$ υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ $\mu \epsilon$

$$x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$$

Also Rolle gilt in g auf $[1,2]$ und es existiert ξ .

$$g'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{x g'(x) - g(x)}{x^2} = 0 \Rightarrow \boxed{x g'(\xi) - g(\xi) = 0}$$

Es sei $h(x) = x g'(x) - g(x)$

Also h ist eine 2. Polynom auf $[1,2]$

Da $h(1) = h(2) = 0$ gilt $h'(\xi) = 0 \Rightarrow g'(\xi) + \xi g''(\xi) - g'(\xi) = 0 \Rightarrow$

$$\xi g''(\xi) = 0 \quad \xi \neq 0 \Rightarrow$$

$$g''(\xi) = 0 \quad \text{Also}$$

Da $g''(x) \neq 0, x \in (1,2)$

Existiert h eine andere 2. Polynom mit $h(1) = h(2) = 0$
nur Sprünge sind möglich.