

Θέμα 1°

Δίνεται συνάρτηση f και παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\beta) > f(\alpha)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) > 0$.

f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ άρα και συνεκίς

ΘΜΤ για την f στο $[\alpha, \beta]$ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέ

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > 0 \quad \text{Διότι } f(\beta) > f(\alpha) \quad \text{και } \beta > \alpha.$$

Θέμα 2°

Αν $\beta > \alpha > 0$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $\ln \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta - \alpha}{\xi}$.

$$\ln \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta - \alpha}{\xi} \quad \Leftrightarrow \quad \ln \beta - \ln \alpha = \frac{\beta - \alpha}{\xi} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\xi}$$

Θεωρώ $g(x) = \ln x$, παραγωγίσιμη και συνεκίς στο $[\alpha, \beta]$

Από ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέ $g'(\xi) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha}$

Θέμα 3ο

Εστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ για την

οποία ισχύει $\ln \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \alpha^2 - \beta^2$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) + (\alpha + \beta)f(\xi) = 0$.

$$\ln \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \alpha^2 - \beta^2 \quad \xRightarrow{f(x) > 0} \quad \ln f(\beta) - \ln f(\alpha) = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \Rightarrow \boxed{\frac{\ln f(\beta) - \ln f(\alpha)}{\beta - \alpha} = -(\alpha + \beta)} \quad (1)$$

Θεωρώ $g(x) = \ln f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$

g παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων

άρα και συνεκίς, οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέ

$$g'(\xi) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow \frac{g'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{\ln f(\beta) - \ln f(\alpha)}{\beta - \alpha} \xRightarrow{(1)} \frac{g'(\xi)}{f(\xi)} = -(\alpha + \beta) \Rightarrow$$

$$f'(\xi) = -(\alpha + \beta)f(\xi) \Rightarrow \boxed{f'(\xi) + (\alpha + \beta)f(\xi) = 0}$$

$$f'(z) = -(a+b)f(z) \Rightarrow \underline{f'(z) + (a+b)f(z) = 0}$$

Θέμα 4^ο

Δίνεται συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\alpha, \beta]$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_3, \xi_4 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $2f'(\xi_3) + 3f'(\xi_4) = 0$.

Αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του Rolle για την f στο $[\alpha, \beta] \Rightarrow$
 f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, f παραγωγίσιμη στο (α, β) , $f(\alpha) = f(\beta)$

Από ΘΜΤ για την f στο $[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$ υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2})$ με

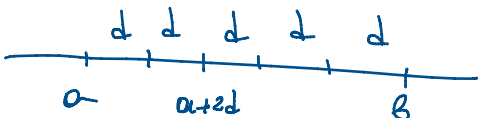
$$f'(\xi_1) = \frac{f(\frac{\alpha+\beta}{2}) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{f(\frac{\alpha+\beta}{2}) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad (1)$$

Από ΘΜΤ για την f στο $[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$ υπάρχει $\xi_2 \in (\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta)$ με

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = \frac{\cancel{f(\frac{\alpha+\beta}{2})} - \cancel{f(\alpha)} + \cancel{f(\beta)} - \cancel{f(\frac{\alpha+\beta}{2})}}{\frac{\beta-\alpha}{2}} = 0$$

β)



$$d = \frac{\beta - \alpha}{5} \Rightarrow 5d = \beta - \alpha \Rightarrow \beta = 5d + \alpha$$

ΘΜΤ για την f στο $[\alpha, \alpha+2d]$ υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \alpha+2d)$ με

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\alpha+2d) - f(\alpha)}{\alpha+2d - \alpha} \Rightarrow 2d \cdot f'(\xi_1) = f(\alpha+2d) - f(\alpha) \quad (1)$$

ΘΜΤ για την f στο $[\alpha+2d, \beta]$ υπάρχει $\xi_2 \in (\alpha+2d, \beta)$ με

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\alpha+2d)}{\beta - (\alpha+2d)} \Rightarrow f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\alpha+2d)}{5d + \alpha - \alpha - 2d} \Rightarrow 3d f'(\xi_2) = f(\beta) - f(\alpha+2d) \quad (2)$$

$$b - (a+2d)$$

$$c_1 + c_2 \Rightarrow 2 \Delta f'(x_1) + 3 \Delta f'(x_2) = \cancel{f(a+2d)} - \cancel{f(a)} + \cancel{f(b)} - \cancel{f(a+2d)} \Rightarrow$$

$$\Delta (2f'(x_1) + 3f'(x_2)) = 0 \Rightarrow \boxed{2f'(x_1) + 3f'(x_2)}$$