

Θέμα 5ο

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ με $f(1) = 2$ και $f(2) = 1$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ με $f(x_0) = x_0$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,2)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$.

α) Θεωρώ $g(x) = f(x) - x$, $x \in [1,2]$
 g συνεχής στο $[1,2]$

$$\begin{aligned} g(1) &= f(1) - 1 = 2 - 1 = 1 > 0 \\ g(2) &= f(2) - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} g(1)g(2) < 0 \text{ Από Θ. Bolzano} \\ \text{για τη } g \text{ στο } [1,2] \text{ υπάρχει} \\ x_0 \in (1,2) \text{ με } g(x_0) = 0 \Rightarrow \boxed{f(x_0) = x_0} \end{array} \right.$$

β) ΘΜΤ για την f στο $[1, x_0]$ υπάρχει $\xi_1 \in (1, x_0) \subset (1,2)$ με

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} \Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{x_0 - 2}{x_0 - 1} \quad (1)$$

ΘΜΤ για την f στο $[x_0, 2]$ υπάρχει $\xi_2 \in (x_0, 2) \subset (1,2)$ με

$$f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0} \Rightarrow f'(\xi_2) = \frac{1 - x_0}{2 - x_0} \quad (2)$$

$$(1) \times (2) \Rightarrow f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = \frac{x_0 - 2}{x_0 - 1} \cdot \frac{1 - x_0}{2 - x_0} = \frac{x_0 - 2}{x_0 - 1} \cdot \frac{x_0 - 1}{x_0 - 2} = 1$$

Θέμα 6ο $\rightarrow$ 2 ΘΜΤ συν f και Rolle συν $f' \rightarrow$ για την f''

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν τα σημεία

$A(a, f(a)), B(b, f(b)), \Gamma(\gamma, f(\gamma))$ με $a < b < \gamma$ είναι συνευθειακά, να δείξετε

ότι υπάρχει $\xi \in (a, \gamma)$ με $f''(\xi) = 0$.

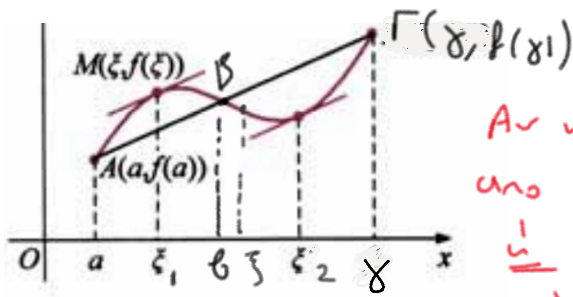
$$A, B, \Gamma \text{ συνευθειακά} \Rightarrow \lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(\gamma) - f(b)}{\gamma - b} \quad (1)$$

ΘΜΤ για την f στο $[a, b]$ υπάρχει $\xi_1 \in (a, b)$ με $f'(\xi_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

ΘΜΤ για την f στο $[b, \gamma]$ υπάρχει $\xi_2 \in (b, \gamma)$ με $f'(\xi_2) = \frac{f(\gamma) - f(b)}{\gamma - b}$

$$(1) \Rightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2) \text{ οπότε από Rolle για την } f' \text{ στο } [\xi_1, \xi_2]$$

υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, \gamma)$ με $f''(\xi) = 0$



Γραφική ερμηνεία
 2 φάσεις παραγωγής
 Αν η συνάρτηση διασπάται
 από 3 συνεπόμενα σημεία
ή είναι αυθόρμητη
 φάση και τότε
 έχει ακρόσημο με ημίτονο και
 ερη $f''(\xi)=0$

Θέμα 7° (5 Β' ομάδας σχολικού σελ. 132)

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,4]$ και ισχύει $2 \leq f'(x) \leq 5$ για κάθε $x \in (0,4)$. Αν $f(0)=1$, να αποδείξετε ότι $9 \leq f(4) \leq 21$.

f συνεχής στο $[0,4]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,4)$
 Από ΘΜΤ για την f στο $[0,4]$ υπάρχει $\xi \in (0,4)$ με

$$f'(\xi) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(4) - 1}{4} \quad (1)$$

$$\text{Όπως } 2 \leq f'(\xi) \leq 5 \xrightarrow{(1)} 2 \leq \frac{f(4) - 1}{4} \leq 5 \xrightarrow{\cdot 4} 8 \leq f(4) - 1 \leq 20 \Rightarrow \boxed{9 \leq f(4) \leq 21}$$

Θέμα 8° (4 Β' ομάδας σχολικού σελ. 132)

i) Να αποδείξετε ότι $\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Αν f είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = \frac{x}{1+x^2}$, να αποδείξετε ότι για όλα τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(\beta) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |\beta - a|.$$

$$i) \left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \xrightarrow{1+x^2 > 0} 2|x| \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 + 1 - 2|x| \Leftrightarrow 0 \leq (|x| - 1)^2 \text{ που ισχύει}$$

ii) Αν $a = \beta$ ισχύει ως ισότητα. Αν $a < \beta$

ΘΜΤ για την f στο $[a, \beta]$ υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ με $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$

$$\text{Όμως } |f'(x)| = \left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2} \text{ αν'ε α) οπότε } \left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{|f(b)-f(a)|}{|b-a|} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |f(b)-f(a)| \leq \frac{1}{2} |b-a|$$

Ομοια αν $b < a$ θμιτ σω $[b, a]$ κη...---

Θέμα 9^ο (6 Β' ομάδας σχολικού σελ. 132)

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και ισχύει $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Αν $f(-1) = -1$ και $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$, εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$.

f συνεχής σω $[-1, 1]$ και παραγωγική σω $(-1, 1)$

Απο ΘΜΤ για την f σω $[-1, 0]$ υπάρχει $\tau_1 \in (-1, 0)$ μτ $f'(\tau_1) = \frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}$
 $\Rightarrow \boxed{f'(\tau_1) = f(0) + 1}$ Όμως $f'(\tau_1) \leq 1 \Rightarrow f(0) + 1 \leq 1 \Rightarrow \boxed{f(0) \leq 0}$ (1)

Απο ΘΜΤ για την f σω $[0, 1]$ υπάρχει $\tau_2 \in (0, 1)$ μτ $f'(\tau_2) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$
 $\Rightarrow \boxed{f'(\tau_2) = 1 - f(0)}$ Όμως $f'(\tau_2) \leq 1 \Rightarrow 1 - f(0) \leq 1 \Rightarrow \boxed{f(0) \geq 0}$ (2)

Απο (1), (2) $\Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$