

Θέμα 10° Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες

α) $\frac{\beta - \alpha}{\beta} < \ln \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta - \alpha}{\alpha}$ όπου $0 < \alpha < \beta$.

β) $\frac{\beta - \alpha}{\sin^2 \alpha} < \epsilon\phi\beta - \epsilon\phi\alpha < \frac{\beta - \alpha}{\sin^2 \beta}$ όπου $0 \leq \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.

γ) $\eta\mu(\alpha + h) < \eta\mu\alpha + h \varsigma\upsilon\nu\alpha$, όπου $0 < \alpha < \alpha + h < \frac{\pi}{2}$.

α) $\frac{\beta - \alpha}{\beta} < \ln \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \xLeftrightarrow[\beta > 0]{\alpha > 0} \frac{\beta - \alpha}{\beta} < \ln\beta - \ln\alpha < \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \xLeftrightarrow[\beta - \alpha > 0]{\beta > \alpha} \frac{1}{\beta} < \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\alpha}$

Θεωρώ $f(x) = \ln x$ παραγωγισμένη στο $(0, \infty)$ και συνεχώς
Από Θ.Μ.Τ. στο $[a, b]$ υπάρχει $f \in (a, b)$ με $f'(f) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{\ln b - \ln a}{b - a}} \quad (1)$$

Όμως $a < f < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{f} > \frac{1}{b} \xRightarrow{(1)} \boxed{\frac{1}{a} > \frac{\ln b - \ln a}{b - a} > \frac{1}{b}}$

ii) $\frac{\beta - \alpha}{\sin^2 \alpha} < \epsilon\phi\beta - \epsilon\phi\alpha < \frac{\beta - \alpha}{\sin^2 \beta}$, $0 \leq \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$

$\xLeftrightarrow[\beta - \alpha > 0]{\beta > \alpha} \frac{1}{\sin^2 \alpha} < \frac{\epsilon\phi\beta - \epsilon\phi\alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\sin^2 \beta}$

Θεωρώ $f(x) = \epsilon\phi x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ παραγωγισμένη και συνεχώς

Από Θ.Μ.Τ. για την f στο $[a, b]$ υπάρχει $f \in (a, b)$ με

$$f'(f) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sin^2 f} = \frac{\epsilon\phi b - \epsilon\phi a}{b - a}} \quad (1)$$

Όμως $a < f < b \xRightarrow[\sin x \downarrow]{0 \leq a < f < b < \frac{\pi}{2}} \sin a > \sin f > \sin b \xRightarrow[\substack{\sin x \geq 0 \\ x \in [0, \frac{\pi}{2})}]{0 \leq a < f < b < \frac{\pi}{2}}$

$$\sin^2 a > \sin^2 \zeta > \sin^2 b \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 a} < \frac{1}{\sin^2 \zeta} < \frac{1}{\sin^2 b} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{\sin^2 a} < \frac{c_4 b - c_4 a}{b-a} < \frac{1}{\sin^2 b}$$

$$\text{iii) } \psi(a+h) < \psi a + h \cdot \sin a, \quad 0 < a < a+h < \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \psi(a+h) - \psi a < h \cdot \sin a \stackrel{h>0}{\Leftrightarrow} \frac{\psi(a+h) - \psi a}{h} < \sin a$$

$$\text{Θεωρώ } f(x) = \psi x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Αν ο ΘΜΤ για την f στο $[a, a+h]$ υπάρχει $\zeta \in (a, a+h)$ τέ

$$f'(\zeta) = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} \Rightarrow \boxed{\sin \zeta = \frac{\psi(a+h) - \psi a}{h}} \quad (1)$$

$$\text{'Όμως } a < \zeta < a+h \stackrel{\sin \uparrow [0, \pi/2]}{\Rightarrow} \sin a > \sin \zeta > \sin(a+h) \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{\sin a > \frac{\psi(a+h) - \psi a}{h} > \sin(a+h)}$$

Θέμα 11° $\rightarrow$ ανισότητα Jensen $\rightarrow$ 2 ΘΜΤ στην f και μονοτονία f'
 Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$, με f' είναι γνησίως $\uparrow$ κυρτότητα f

αύξουσα στο (a, β) . Να δείξετε ότι $f(\frac{a+\beta}{2}) < \frac{f(a)+f(\beta)}{2}$ και ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$

με $f''(\xi) > 0$.

ΘΜΤ για την f στο $[a, \frac{a+\beta}{2}]$ υπάρχει $\zeta_1 \in (a, \frac{a+\beta}{2})$ τέ

$$f'(\zeta_1) = \frac{f(\frac{a+\beta}{2}) - f(a)}{\frac{a+\beta}{2} - a} \Rightarrow f'(\zeta_1) = \frac{f(\frac{a+\beta}{2}) - f(a)}{\frac{\beta-a}{2}} \quad (1)$$

ΘΜΤ για την f στο $[\frac{a+\beta}{2}, \beta]$ υπάρχει $\zeta_2 \in (\frac{a+\beta}{2}, \beta)$ τέ

$$f'(\zeta_2) = \frac{f(\beta) - f(\frac{a+\beta}{2})}{\beta - \frac{a+\beta}{2}} \Rightarrow f'(\zeta_2) = \frac{f(\beta) - f(\frac{a+\beta}{2})}{\frac{\beta-a}{2}} \quad (2)$$

$$\text{'Όμως } \zeta_1 < \zeta_2 \stackrel{f' \uparrow}{\Rightarrow} f'(\zeta_1) < f'(\zeta_2) \stackrel{(1)}{\stackrel{(2)}}{\Rightarrow} \frac{f(\frac{a+\beta}{2}) - f(a)}{\frac{\beta-a}{2}} < \frac{f(\beta) - f(\frac{a+\beta}{2})}{\frac{\beta-a}{2}}$$

$$\beta-a>0 \Rightarrow f(\frac{a+\beta}{2}) - f(a) < f(\beta) - f(\frac{a+\beta}{2}) \rightarrow 2f(\frac{a+\beta}{2}) < f(a) + f(\beta) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} b-a > 0 &\Rightarrow f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) < f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) < f(a) + f(b) \Rightarrow \\ &\boxed{f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a) + f(b)}{2}} \end{aligned}$$

Από ΘΜΤ για την f' στο $[f_1, f_2]$ υπάρχει $\xi \in (f_1, f_2) \subset (a, b)$
 με $f''(\xi) = \frac{f'(f_2) - f'(f_1)}{f_2 - f_1} > 0$ αφού $f_2 > f_1 \xrightarrow{f' \uparrow} f'(f_2) > f'(f_1)$

Θέμα 12°

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f(0)=0$ και $f(1)=1$
 Αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ να δείξετε ότι $f(x) > x$ για κάθε $x \in (0,1)$.

Έστω $x \in (0,1)$

ΘΜΤ για την f στο $[0, x]$ υπάρχει $\xi_1 \in (0, x)$ με
 $f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow \boxed{f'(\xi_1) = \frac{f(x)}{x}} \quad (1)$

ΘΜΤ για την f στο $[x, 1]$ υπάρχει $\xi_2 \in (x, 1)$ με
 $f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \Rightarrow \boxed{f'(\xi_2) = \frac{1 - f(x)}{1 - x}} \quad (2)$

Όμως $f_1 < f_2 \xrightarrow{f' \downarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \xrightarrow{(1)} \frac{f(x)}{x} > \frac{1 - f(x)}{1 - x} \xrightarrow{0 < x < 1}$

$$(1-x)f(x) > x(1-f(x)) \Rightarrow f(x) - xf(x) > x - xf(x) \Rightarrow \boxed{f(x) > x}$$

