

Μάθημα 69ο - Συνέπειες θεωρήματος μέσης τιμής

(άσκηση 1 Α' ομάδας σελ. 256 σχολικού)

Αν για τις συναρτήσεις  $f, g$  ισχύουν:

$$f'(x) = g(x) \text{ και } g'(x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $\varphi(x) = [f(x)]^2 + [g(x)]^2$  είναι σταθερή.

A.v.S.o.  $\varphi'(x) = 0, x \in \mathbb{R}$

Είναι  $\varphi'(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) + 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) + 2g(x)(-f(x)) = 0$

Αφού  $\varphi'(x) = 0, x \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi(x) = C, x \in \mathbb{R}$

**Εφαρμογή :** Να αποδείξετε την ταυτότητα :  $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

$$(f^2(x))' = 2f(x) \cdot f'(x)$$

Θεωρώ  $f(x) = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x, x \in \mathbb{R}$

$f$  παραγωγισιμη σε  $\mathbb{R}$   $\hookrightarrow$  πρέπει παραγωγισιμη με

$$f'(x) = 2 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2\sigma\upsilon\nu x \cdot (-\eta\mu x) = 0, x \in \mathbb{R}$$

Αρα  $f(x) = C, C \in \mathbb{R}$

$$f(0) = C \Rightarrow \eta\mu^2 0 + \sigma\upsilon\nu^2 0 = C \Rightarrow 1 = C$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 1 \Rightarrow \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1, x \in \mathbb{R}$$

(άσκηση 1 Β' ομάδας σελ. 257 σχολικού)

Αν για μία συνάρτηση  $f$  που είναι ορισμένη σ' όλο το  $\mathbb{R}$  ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2 \text{ για όλα τα } x, y \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή.

A.v.S.o.  $f'(x) = 0, x \in \mathbb{R}$

Για  $y = x_0 \in \mathbb{R}$   $|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|^2$

Για  $x \neq x_0 \in \mathbb{R}$   $\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq \frac{|x - x_0|^2}{|x - x_0|} \Rightarrow$

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq |x - x_0| \Rightarrow$$

$$-|x - x_0| \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq |x - x_0|$$

$$-|x-x_0| \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq |x-x_0|$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x-x_0| = 0 \quad \text{Αν η κρ. παραβολή είναι} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0 \Rightarrow$$

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{για το συγκεκριμένο } x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Εάν είναι } f'(x) = 0, \forall x \Rightarrow f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$$

| $f(x)$                         | για παράσταση $F$ της $f$ ( $F' = f$ )                            |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| $x$                            | $\frac{x^2}{2}$                                                   |
| $x^{-3}$                       | $\frac{x^{-2}}{-2}$                                               |
| $\sqrt{x} = x^{1/2}, x \geq 0$ | $\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{3/2}}{3/2}$   |
| $\sqrt[3]{x}, x > 0$           | $\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} = \frac{x^{2/3}}{2/3}$ |

$$x^v = \left( \frac{x^{v+1}}{v+1} \right)', \quad v \neq -1$$