Θέμα 1ο Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f στις παρακάτω περιπτώσεις :

α) $f:\Re\to\Re$ με $f'(x) = ημx + συνx + x$, για κάθε $x\in\Re$ και $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{32}+1$.

β) $f:(0,\pi)\to\Re$ με $f'(x)\cdot e^{f(x)} = συνx$, για κάθε $x\in(0,\pi)$ και $f(\frac{\pi}{2}) = 0$.

γ) $f:(0,+\infty)\to\Re$ με $xf'(x) + f(x) = \frac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 5$.

δ) $f:[0,\pi]\to\Re$ με $f'(x)\cdot ημx - f(x)\cdot συνx = ημ^2x$, για κάθε $x\in(0,\pi)$ και $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

ε) $f:[0,\frac{\pi}{2})\to\Re$ με $f''(x) = -\frac{1}{συν^2x}$, για κάθε $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ και $f'(\frac{\pi}{4}) = f(0) = 2$.

στ) $f:\Re^*\to\Re$ $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ για κάθε $x\in\Re^*$ και $f(1) = f(-1) = 2$.

α) $f'(x) = \left(-συνx + ημx + \frac{x^2}{2}\right)'$, $x\in R$ $\Longrightarrow f(x) = -συνx + ημx + \frac{x^2}{2} + c$

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{32}+1 \Longrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi^2}{32} + c = \frac{\pi^2}{32} + 1 \Longrightarrow c = 1$

Τελικά $f(x) = -συνx + ημx + \frac{x^2}{2} + 1$

β) $f'(x)\cdot e^{f(x)} = συνx \Longleftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)' = (ημx)'$, $x\in(0,\pi) \Longrightarrow$

$e^{f(x)} = ημx + c$

για $x = \frac{\pi}{2}$ έχω $e^{f(\frac{\pi}{2})} = ημ\frac{\pi}{2} + c \Longrightarrow e^0 = 1 + c \Longrightarrow 1 = 1 + c \Longrightarrow c = 0$

οπότε $e^{f(x)} = ημx \Longrightarrow f(x) = \ln ημx$

γ) $xf'(x) + f(x) = \frac{1}{x} \Longleftrightarrow (xf(x))' = (\ln x)'$, $x\in(0,+\infty)$

$xf(x) = \ln x + c$.

Για $x = 1$: $f(1) = 0 + c \Longrightarrow 5 = c$

Άρα $xf(x) = \ln x + 5 \xRightarrow{x>0} f(x) = \frac{\ln x + 5}{x}$

δ) $f:[0,\pi]\to R$, $f'(x)ημx - f(x)συνx = ημ^2x$, $x\in(0,\pi)$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$

$\xRightarrow[ημx\neq0]{x\in(0,\pi)} \frac{f'(x)ημx - f(x)συνx}{ημ^2x} = 1 \Longrightarrow \left(\frac{f(x)}{ημx}\right)' = (x)'$, $x\in(0,\pi)$

$$\frac{f(x)}{ημx} = x + c \,, \quad x \in (0,π)$$

Για $x=\frac{π}{2}$ έχω $\frac{f(\frac{π}{2})}{ημ\frac{π}{2}} = \frac{π}{2} + c \Rightarrow \frac{π}{2} = \frac{π}{2} + c \Rightarrow c = 0$

οπότε $\frac{f(x)}{ημx} = x \Rightarrow f(x) = x \cdot ημx \,, \; x \in (0,π)$

f συνεχής στο $0 \rightarrow f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x \cdot ημx) = 0$

f συνεχής στο $π \rightarrow f(π) = \lim_{x\to π} f(x) = \lim_{x\to π}(x\,ημx) = 0$

Άρα $f(x) = \begin{cases} x\cdot ημx \,, & x\in(0,π) \\ 0 \,, & x=0 \text{ ή } x=π \end{cases} = x\cdot ημx \,, \; x\in[0,π]$

ε) $f:[0,\frac{π}{2}) \to \mathbb{R}$, $f''(x) = -\frac{1}{συν^2x}$, $x\in(0,\frac{π}{2})$, $f'(\frac{π}{4}) = f(0) = 2$

$$(f'(x))' = (-εφx)' \,, \quad x\in(0,\tfrac{π}{2})$$

$$f'(x) = -εφx + c \,, \quad x\in(0,\tfrac{π}{2})$$

Για $x=\frac{π}{4}$ έχω $f'(\frac{π}{4}) = -εφ\frac{π}{4} + c$

$2 = -1 + c$

$c = 3$

$(\ln συνx)' = \frac{-ημx}{συνx} = -εφx$

οπότε $f'(x) = -εφx + 3$, $x\in(0,\frac{π}{2})$

$f'(x) = (\ln συνx + 3x)'$, $x\in(0,\frac{π}{2})$ και επειδή

f συνεχής στο $[0,\frac{π}{2})$ $\quad f(x) = \ln συνx + 3x + c_1$, $x\in[0,\frac{π}{2})$

για $x=0$: $f(0) = \ln συν0 + 0 + c_1$

$2 = \ln 1 + c_1 \rightarrow c_1 = 2$

Τελικά $f(x) = \ln συνx + 3x + 2$, $x\in[0,\frac{π}{2})$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}^*$ $\quad f(1) = f(-1) = 2$

α2) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \ x \in \mathbb{R}^*$ $\quad f(1) = f(-1) = 2$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)', \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + c_1, & x < 0 \\ \frac{1}{x} + c_2, & x > 0 \end{cases}$$

$f(1) = 2 \Rightarrow 1 + c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = 1$

$f(-1) = 2 \Rightarrow -1 + c_1 = 2 \Rightarrow c_1 = 3$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 3, & x < 0 \\ \frac{1}{x} + 1, & x > 0 \end{cases}$$