

Θέμα 2°

Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $x \cdot f'(x) = \eta\mu x + x \cdot \ln x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 2$. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x \cdot \eta\mu x + 2$.

1ος τρόπος / $x \cdot f'(x) = \eta\mu x + x \cdot \ln x \cdot \sigma\upsilon\nu x \iff$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \eta\mu x + \ln x \cdot \sigma\upsilon\nu x \iff f'(x) = (\ln x \cdot \eta\mu x)', x \in (0, +\infty)$$

οπότε $f(x) = \ln x \cdot \eta\mu x + C$.

Για $x=1$ έχω $f(1) = \ln 1 \cdot \eta\mu 1 + C \Rightarrow 2 = 0 + C \Rightarrow C = 2$

Τελικά $f(x) = \ln x \cdot \eta\mu x + 2$

2ος τρόπος / Θεωρώ $g(x) = f(x) - \ln x \cdot \eta\mu x, x \in (0, +\infty)$

g παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων

με $g'(x) = f'(x) - \left(\frac{1}{x} \eta\mu x + \ln x \cdot \sigma\upsilon\nu x\right) =$

$$= f'(x) - \frac{1}{x} \eta\mu x - \ln x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \frac{x f'(x) - \eta\mu x - x \ln x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$$

για $x > 0$

Άρα $g(x) = C$.

για $x=1$: $g(1) = C \Rightarrow f(1) - \ln 1 \cdot \eta\mu 1 = C \Rightarrow C = 2$

Τελικά $g(x) = 2 \Rightarrow f(x) = \ln x \cdot \eta\mu x + 2, x > 0$

Θέμα 3°

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 2$. Να δείξετε ότι $f(x) = 2e^{2x-2}$.

1ος τρόπος / $f'(x) = 2f(x) \iff$

$$f'(x) - 2f(x) = 0$$

$$e^{-2x} \cdot f'(x) - 2e^{-2x} f(x) = 0$$

$$(e^{-2x} f(x))' = 0, x \in \mathbb{R}$$

...

Μεθοδολογία

$$f'(x) + g'(x)f(x) = 0$$

$$e^{g(x)} f'(x) + e^{g(x)} g'(x) f(x) = 0$$

$$(e^{g(x)} f(x))' = 0$$

$$e^{g(x)} f(x) = C$$

$$y'' - 2y' = 0$$

$$e^{-2x} \cdot f(x) = c$$

$$e^{-2x} f(x) = c$$

$$\text{για } x=1 : e^{-2} f(1) = c \Rightarrow \boxed{2e^{-2} = c}$$

$$\text{Τελικά } f(x) \cdot e^{-2x} = 2e^{-2} \Rightarrow \frac{f(x)}{e^{2x}} = 2e^{-2} \Rightarrow f(x) = 2e^{2x-2}$$

2ος τρόπος

$$\left(\begin{array}{l} \text{Θεωρώ } g(x) = f(x) - 2e^{2x-2} \\ g'(x) = f'(x) - 2 \cdot e^{2x-2} \cdot (2x-2)' = f'(x) - 4 \cdot e^{2x-2} \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{Δεν θάοινα} \\ \text{με αυτή τη} \\ g(x) \end{array}$$

$$\text{Θεωρώ } g(x) = \frac{f(x)}{e^{2x-2}}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ παραγωγίσιμη με}$$

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^{2x-2} - f(x) \cdot e^{2x-2} \cdot (2x-2)'}{(e^{2x-2})'} = \frac{e^{2x-2} (f'(x) - 2f(x))}{(e^{2x-2})^2} = 0$$

$$\text{Άρα } g(x) = c.$$

$$\text{Για } x=1 : g(1) = c \Rightarrow \frac{f(1)}{e^{2-2}} = c \Rightarrow 2 = c$$

$$\text{Τελικά } g(x) = 2 \Rightarrow f(x) = 2 \cdot e^{2x-2}$$

Θέμα 5ο

Δίνεται συνάρτηση $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,2]$, δύο φορές

παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ και ισχύουν $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ και

$$(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = -1, \text{ για κάθε } x \in (0,2).$$

ι) Να αποδείξετε ότι $f(x) \cdot f'(x) = -x + 1$ για κάθε $x \in (0,2)$.

ιι) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ για κάθε $x \in [0,2]$.

$$f'(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x) = -1 \Leftrightarrow (f(x) \cdot f'(x))' = (-x)' , \quad x \in (0,2)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \cdot f'(x) = -x + c$$

$$\text{Για } x=1 \text{ έχω } f(1) \cdot f'(1) = -1 + c \Rightarrow 0 = -1 + c \Rightarrow c = 1$$

$$\text{Ondze } f(x) \cdot f'(x) = -x+1, \quad x \in (0,2)$$

$$\text{Eivon } f(x) \cdot f'(x) = -x+1 \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = -2x+2 \Leftrightarrow$$

$$(f^2(x))' = (-x^2+2x)', \quad x \in (0,2) \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) = -x^2+2x + C_1$$

$$\text{Γia } x=1 \text{ exw } f^2(1) = -1+2+C_1 \Rightarrow 1 = 1+C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\text{Συγκριν } f^2(x) = -x^2+2x, \quad x \in (0,2)$$

$$|f(x)| = \sqrt{-x^2+2x} \quad (1)$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow |f(x)|=0 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+2x}=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=2$$

$$\text{Γia } x \in (0,2) \Rightarrow f(x) \neq 0 \xrightarrow{\text{f' > 0}} \text{f σιζιπει ποσως } \xrightarrow{f(1)>0} f(x)>0, \quad x \in (0,2)$$

$$\text{Αρα } (1) \Rightarrow f(x) = \sqrt{-x^2+2x}, \quad x \in (0,2)$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{-x^2+2x} = 0$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{-x^2+2x} = 0$$

Τελικά

$$f(x) = \sqrt{-x^2+2x}, \quad x \in [0,2]$$