

Θέμα 6° (από ανισοϊσότητα μέσω Fermat σε ισότητα)

α) Αν $0 < \alpha, \beta$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x + \beta^x \geq 2$ να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 1$.

β) Αν $0 < \alpha \neq 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x \geq x+1$ να δείξετε ότι $\alpha = e$.

γ) Αν $0 < \alpha$ και $x^\alpha \geq \alpha^x$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

δ) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$xf'(x) + 1 \leq x^2 + \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.

α) Θεωρώ $f(x) = \alpha^x + \beta^x$, $x \in \mathbb{R}$ οπότε

$\alpha^x + \beta^x \geq 2 \iff f(x) \geq f(0)$, $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f παρουσιάζει
ελάχιστο για $x=0$ οπότε από Fermat $f'(0) = 0$.

Όμως $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha + \beta^x \ln \beta$ οπότε $f'(0) = 0 \Rightarrow \alpha^0 \ln \alpha + \beta^0 \ln \beta = 0 \Rightarrow$
 $\ln \alpha + \ln \beta = 0 \Rightarrow \ln(\alpha\beta) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha\beta = 1}$

β) $\alpha^x \geq x+1 \iff \alpha^x - x - 1 \geq 0$ (1)

Θεωρώ $f(x) = \alpha^x - x - 1$ οπότε (1) $\Rightarrow f(x) \geq f(0)$, $x \in \mathbb{R}$ που σημαίνει
ότι η f παρουσιάζει στο 0 ελάχιστο, οπότε από Fermat $f'(0) = 0$

Όμως $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha - 1$ οπότε $f'(0) = 0 \Rightarrow \alpha^0 \ln \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \ln \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = e$

γ) $x^\alpha \geq \alpha^x$, $x > 0 \Rightarrow x^\alpha - \alpha^x \geq 0$ (1)

Θεωρώ $f(x) = x^\alpha - \alpha^x$, $x \in (0, +\infty)$

Η (1) $\Rightarrow f(x) \geq f(\alpha)$, $x > 0$ που σημαίνει ότι η f
παρουσιάζει ελάχιστο στο α , οπότε από Fermat $f'(\alpha) = 0$

Όμως $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} - \alpha^x \ln \alpha$, $x > 0$

οπότε $f'(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \alpha^{\alpha-1} - \alpha^\alpha \ln \alpha = 0 \Rightarrow \alpha^\alpha - \alpha^\alpha \ln \alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha^\alpha (1 - \ln \alpha) = 0 \xrightarrow{\alpha > 0} \ln \alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = e}$

δ) $xf'(x) + 1 \leq x^2 + \sin x \Rightarrow xf'(x) + 1 - x^2 - \sin x \leq 0$ (1)

Θεωρώ $g(x) = xf'(x) + 1 - x^2 - \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη ως πράξη
παραγωγίσιμη. Η (1) $\Rightarrow g(x) \leq g(0)$ που σημαίνει ότι η g
παρουσιάζει μέγιστο στο 0, οπότε από Fermat $g'(0) = 0$.

Όμως $g'(x) = f'(x) + x f''(x) - 2x + \cos x$ οπότε

Optim $g'(x) = f(x) + x g'(x) - 2x + 4x$ 0 nicht

$$g'(0) = 0 \Rightarrow f(0) + 0 - 0 + 0 = 0 \rightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x) \geq x^2 - x + 1$

i. $f'(1)=1$ ii. $x^2-x+1\geq\frac{3}{4}$ iii. $x_o=\frac{1}{2}$ iv. $f'(\frac{1}{2})=0$.

i) $f(x) = x^2 + x - 1 \geq 0$ (1)

Örneğin $g(x) = f(x) - x^2 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ verdiğimizde

(ii) $\Rightarrow g(x) \geq g(1)$ now suppose in g suppose g is
 increasing at $x=1$ then by Fermat $g'(1)=0$.

• Optim $g'(x) = f'(x) - 2x + 1$ $\Rightarrow g'(1) = 0 \rightarrow f'(1) - 2 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{f'(1) = 1}$

ii) $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 \geq 0$
 $T_0 = \text{min}$

iii) $f(x_0) = \frac{3}{4}$ Or $f(x) \geq x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$

kan $f(x_0) = \frac{3}{9} \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 + 1 = \frac{3}{9} \Leftrightarrow (x_0 - \frac{1}{2})^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$

iv) $f(x) \geq x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4} \Rightarrow f(x) \geq \frac{3}{4} \Rightarrow f(x) \geq f(\frac{1}{2}), \forall x \in \mathbb{R}$

Ans Fermat $f'(\frac{1}{2}) = 0$

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $(x^2 - 1)f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $f(1) = f(-1) = 0$.

Θεωρώ $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ παραγωγιστή στο $\mathbb{R}$ ως προϊόν παραγωγιστών

$$(x^2-1)f(x) \geq 0 \rightarrow g(x) \geq 0 \quad \text{Ken} \quad g(1)=g(-1)=0 \quad \text{und ist u.g.}$$

Λειτουργεί επίσης ελαχιστο το 0 και στο 1 και στο -1.

Also further $g'(1) = g'(-1) = 0$

10 pws $g'(x) = 2x f(x) + (x^2 - 1) f'(x)$ on $\mathbb{R}$

$$g'(1) = 0 \Rightarrow 2f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$$

- 1 - 0

$$g'(1) = 0 \Rightarrow 2f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$$

$$g'(-1) = 0 \Rightarrow -2f(-1) = 0 \Rightarrow f(-1) = 0$$

Θέμα 10°

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2 φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f έχει το πολύ ένα ακρότατο.

Ύστερ ότι η f είχε 2 ακρότατα στις θέσεις x_1, x_2 με $x_1 < x_2$

Από Fermat $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ και από Rolle για την f' στο $[x_1, x_2]$

Θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ με $f''(\xi) = 0$ Άρα υπάρχει $f'(x) \neq 0$, για

Άρα η f δεν μπορεί να έχει 2 ακρότατα, οπότε έχει
το πολύ 1.