

Μάθημα 74ο - Τοπικά ακρότατα - Θεώρημα Fermat

Θέμα 9°

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε από Fermat $f'(x_0) = 0$

Παραγωγίζουμε τη δοσμένη σχέση: $6f^2(x) \cdot f'(x) + 6f'(x) = 6x^2 + 6$
για $x = x_0$ έχω $6f^2(x_0) \cdot f'(x_0) + 6f'(x_0) = 6x_0^2 + 6$
 $0 + 0 = 6x_0^2 + 6$
 $x_0^2 = -1$ Άτοπο

Συνεπώς η f δεν έχει ακρότατα.

Θέμα 11ο

Έστω συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ και $f(0) < f(1)$. Να αποδείξετε ότι η $f([0,1]) = [f(0), f(1)]$.

f συνεχής στο $[0,1]$ $\xRightarrow{\text{ΘΜ 6Τ}}$ η f παίρνει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή

Αν παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in (0,1)$ τότε από Fermat $f'(x_0) = 0$. Άτοπο αφού $f'(x) \neq 0, x \in (0,1)$

Άρα τα ακρότατα τα παρουσιάζει στα άκρα του $[0,1]$
δηλαδή στο 0 και στο 1. και επειδή $f(0) < f(1)$

συμπεραίνω ότι $f(0)$ ελάχιστο, $f(1)$ μέγιστο

Τελικά το σύνολο τιμών: $f([0,1]) = [f(0), f(1)]$

Θέμα 12°

Έστω συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής και 2 φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(x_1) < f(\alpha) < f(\beta) < f(x_2)$ για κάποια $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι
α) η f παίρνει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο (α, β) .

β) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$

γ) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f''(\xi) = 0$

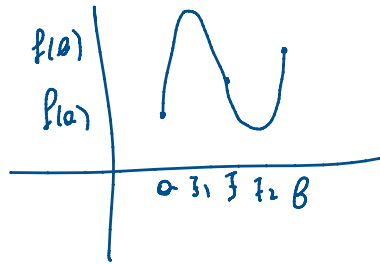
α) f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ $\xRightarrow{\text{ΘΜ 6Τ}}$ η f παίρνει και μέγιστη και

α) f συνεχής στο $[a,b]$ $\xRightarrow{\text{ΘΜΓΤ}}$ η f παίρνει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[a,b]$

Επειδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a,b)$ με $f(x_1) < f(a) < f(b) < f(x_2)$ συμπεραίνω ότι τα $f(a), f(b)$ δεν είναι ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο. Συνεπώς παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε κάποια $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$ και έχω $\xi_1 < \xi_2$

β) $f(\xi_1), f(\xi_2)$ ακρότατα, ξ_1, ξ_2 θεωρούμε σημεία του Df , f παραγωγίσιμη. Από Fermat $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$

γ) Από Rolle για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$ υπάρχει $\eta \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a,b)$ με $f''(\eta) = 0$



Θέμα 13ο

Έστω συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = (x^2 - x) \cdot f'(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

f συνεχής στο $[0,1]$ $\xRightarrow{\text{ΘΜΓΤ}}$ η f παίρνει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή

• Αν παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in (0,1)$ τότε από Fermat $f'(x_0) = 0$, οπότε $f(x_0) = (x_0^2 - x_0) f'(x_0) \Rightarrow f(x_0) = 0$

• Αν παρουσιάζει ακρότατο στο 0 τότε $f(0) = (0^2 - 0) f'(0) \Rightarrow f(0) = 0$

• Αν παρουσιάζει ακρότατο στο 1 τότε $f(1) = (1^2 - 1) f'(1) \Rightarrow f(1) = 0$

Σε κάθε περίπτωση το μέγιστο και το ελάχιστο είναι 0 οπότε $f(x) = 0, x \in [0,1]$