

2. i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$f(x) = \ln x + x - 1$$

και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

- ii) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = 2x \ln x + x^2 - 4x + 3$$

- iii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x \ln x \quad \text{και} \quad h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

- i) $D_f = (0, +\infty)$ συνεχής και παραγωγισιύμενη ως πρώτης παραγωγισιύμενη
 $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$, για $x > 0 \Rightarrow f \uparrow (0, +\infty)$

x	0	1	$+\infty$
f(x)		-	+

$$x > 1 \xrightarrow{f \uparrow} f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$0 < x < 1 \xrightarrow{f \uparrow} f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$$

- ii) $\varphi(x) = 2x \ln x + x^2 - 4x + 3$

- $D_\varphi = (0, +\infty)$ συνεχής και παραγωγισιύμενη ως πρώτης παραγωγισιύμενη
 $\varphi'(x) = 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 2x - 4 = 2 \ln x - 2 + 2x = 2 \cdot t(x)$

x	0	1	$+\infty$
φ'		-	+
φ			

$$\varphi \downarrow [0, 1], \quad \varphi \uparrow [1, +\infty)$$

έχει ελάχιστο το $\varphi(1) = 0$

Αρα $\varphi(x) \geq 0$, για $x \geq 0$
 το = μόνο για $x = 1$

- iii) $g(x) = x \ln x$ και $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$

Οι τετρυφάνες των σημείων κόψης των φ, ψ είναι οι ίδιες

$$\text{Το ερώτημα} \quad g(x) = h(x) \Leftrightarrow x \ln x = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$2x \ln x = -x^2 + 4x - 3 \Leftrightarrow 2x \ln x + x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$$

$$2x \ln x = -x^2 + 4x - 3 \Leftrightarrow 2x \ln x + x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$$

$$\stackrel{(i)}{\Leftrightarrow} \boxed{x=1} \quad \text{αφού για } x \neq 1, x > 0 \Rightarrow \varphi(x) > 0$$

Συνεπώς μοναδικό κοινό σημείο το $(1, g(1)) \rightarrow (1, 0) M$

και για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο M πρέπει να ισχύει

$$g'(1) = h'(1) \quad \text{που ισχύει αφού}$$

$$g'(x) = \ln x + 1, \quad g'(1) = 1 \quad \text{και} \quad h'(x) = -x + 2, \quad h'(1) = 1$$

6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = (x-a)^2(x-b)^2(x-\gamma)^2, \quad \text{με } a < b < \gamma$$

έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-a)(x-b)^2(x-\gamma)^2 + 2(x-b)(x-a)^2(x-\gamma)^2 + 2(x-\gamma)(x-a)^2(x-b)^2 \\ &= 2(x-a)(x-b)(x-\gamma) \left[(x-b)(x-\gamma) + (x-a)(x-\gamma) + (x-a)(x-b) \right] \end{aligned}$$

$$f'(a) = f'(b) = f'(\gamma) = 0$$

Επίσης $f(a) = f(b) = f(\gamma) = 0$ οπότε από Rolle για την f σε

κάθε ένα από τα $[a, b], [b, \gamma]$ υπάρχουν $f_1 \in (a, b), f_2 \in (b, \gamma)$ με

$f'(f_1) = f'(f_2) = 0$ και επειδή f' πολυωνυμική 5ου βαθμού συμπεραίνει να έχει άλλες 3 ρίζες.

$$f'(x) = 6(x-a)(x-b)(x-\gamma)(x-f_1)(x-f_2)$$

x	$-\infty$	a	f_1	b	f_2	γ	$+\infty$
f'	-	+	-	+	-	+	-
f		↗	↘	↗	↘	↗	
		εξ	τρ	εξ	τρ	εξ	

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

i) α) $e^x > 1+x$

ii) α) $\sin x > 1 - \frac{1}{2}x^2$

β) $e^x > 1+x+\frac{1}{2}x^2$

β) $\eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3$

iii) α) $(1+x)^v > 1+vx$, $v \in \mathbb{N}$ με $v \geq 2$

β) $(1+x)^v > 1+vx+\frac{v(v-1)}{2}x^2$, $v \in \mathbb{N}$ με $v \geq 3$.

ii) β) $\eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3$, για $x > 0$

$$\eta\mu x + \frac{1}{6}x^3 - x > 0$$

Θαρῶ $f(x) = \eta\mu x + \frac{1}{6}x^3 - x$, $x \in [0, +\infty)$

$$f'(x) = \sigma\omega x + \frac{1}{2}x^2 - 1$$

$$f''(x) = -\eta\mu x + x, \quad f^{(3)}(x) = -\sigma\omega x + 1 \geq 0, \quad T_0 =$$

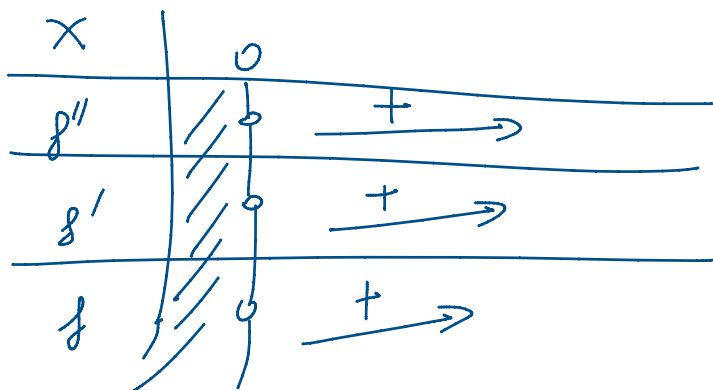
$$|\eta\mu x| \leq |x|$$

για $x > 0 \Rightarrow |x| = x$

για $x = 2\kappa\eta$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

Αρα $f'' \uparrow$

οπότε $\eta\mu x \leq |\eta\mu x| \leq |x| = x \Rightarrow -\eta\mu x + x \geq 0$



για $x > 0 \xrightarrow{f' \uparrow} f(x) > f(0) \Rightarrow \eta\mu x + \frac{1}{6}x^3 - x > 0$, για $x > 0$