

5. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε το σύνολο των τιμών της f σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

ii) Η εξίσωση $x^3 - ax^2 - 9x + a = 0$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = a$ και στη συνέχεια ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

i) $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ παραγωγισίμη ως ρητή ορα και συνεπώς
 με $f'(x) = \frac{(3x^2 - 9)(x^2 - 1) - 2x \cdot (x^3 - 9x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 9x^2 + 9 - 2x^4 + 18x^2}{(x^2 - 1)^2}$
 $= \frac{x^4 + 6x^2 + 9}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(x^2 + 3)^2}{(x^2 - 1)^2} > 0, x \in D_f$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'	+	+	+	+
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

$f \uparrow (-\infty, -1)$
 $f \uparrow (-1, 1)$
 $f \uparrow (1, +\infty)$

$$\Delta_1 = (-\infty, -1) \xrightarrow{f \uparrow} f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$\Delta_2 = (-1, 1) \xrightarrow{f \uparrow} f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$\Delta_3 = (1, +\infty) \xrightarrow{f \uparrow} f(\Delta_3) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$f(D_f) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \mathbb{R}$$

ii) $x^3 - ax^2 - 9x + a = 0 \Leftrightarrow x^3 - 9x = ax^2 - a \Leftrightarrow x^3 - 9x = a(x^2 - 1)$

Αν $x = 1$ τότε $-8 = 0$ Άνω

Αν $x = -1$ τότε $8 = 0$ Άνω

Άρα $x \neq \pm 1$ και η
 παραπάνω εξίσωση είναι
 ισοδύναμη με την $\frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} = a$

$$\boxed{f(x) = a}$$

$a \in f(\Delta_1) = \mathbb{R} \Rightarrow$ υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ με $f(x_1) = a$ και λόγω μονωτικής μονερισμό

$a \in f(\Delta_2) = \mathbb{R} \Rightarrow$ υπάρχει $x_2 \in \Delta_2$ με $f(x_2) = a$ και λόγω μονωτικής μονερισμό

$a \in f(\Delta_3) = \mathbb{R} \Rightarrow$ υπάρχει $x_3 \in \Delta_3$ με $f(x_3) = a$ και λόγω μονωτικής μονερισμό

Συνεπώς η εξίσωση έχει ακριβώς 3 ρίζες.

7. Να αποδείξετε ότι:

- i) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x - \chi\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- ii) $\eta\mu x - \chi\sigma\upsilon\nu x > 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- iii) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο ανοικτό διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- i) f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξις παραγωγισίμων
 $\mu\epsilon \ f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x + x\psi x = x\psi x > 0$, για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
 οπότε $f \uparrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- ii) για $0 < x < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{f \uparrow} f(0) < f(x) < f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{0 < \psi x - x\sigma\upsilon\nu x}$ (1)
- iii) f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ως πράξις παραγωγισίμων
 $\mu\epsilon \ f'(x) = \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \psi x}{x^2} < 0$, από την (1) $\Rightarrow f \downarrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

8. Να αποδείξετε ότι:

- i) Η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι γνησίως αύξουσα.
- ii) $2\eta\mu x + \epsilon\phi x \geq 3x$, για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- i) f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξις παραγωγισίμων

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x + 1 - 3\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

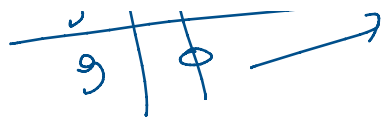
$$\Theta\omega\rho\omega \ g(x) = 2\sigma\upsilon\nu^3 x + 1 - 3\sigma\upsilon\nu^2 x, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$g'(x) = 6\sigma\upsilon\nu^2 x(\psi x) - 6\sigma\upsilon\nu x(-\psi x) = -6\sigma\upsilon\nu x \cdot \psi x (\sigma\upsilon\nu x - 1) > 0$$

για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

x	0	
g'	0	+
g	0	↗

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{g \uparrow} g(0) < g(x) \Rightarrow 0 < g(x) \Rightarrow$$



$$0 < x < 2$$

$$0 < g(x) \rightarrow$$

$$f'(x) > 0, x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow f \uparrow [0, \frac{\pi}{2})$$

$$ii) 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{f \uparrow} f(0) \leq f(x) \Rightarrow 0 \leq 24x + 64x - 3x \rightarrow \boxed{3x \leq 24x + 64x}$$

Π(φιντωση) αν and ποσωση φιντω η ποσωση

x	-∞	x ₀	+∞
f'		-	+
f		↘	↗

$$f(x) \geq f(x_0)$$

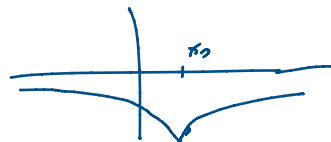
$$1.) \text{ Ar } f(x_0) > 0 \text{ tote } f(x) > 0$$

$$2.) \text{ Ar } f(x_0) = 0 \text{ tote } f(x) \geq 0 \text{ και } f(x) > 0 \text{ για } x \neq x_0 \text{ και } f(x) = 0 \text{ μονο για } x = x_0$$

$$3.) \text{ Ar } f(x_0) < 0$$

$$3a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0 \text{ tote } f(x) < 0, x \in \mathbb{R}$$



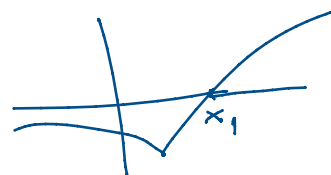
$$3b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 0$$

$$\text{ } \vee \text{ nepeca } x_1 \text{ pr } f(x_1) = 0$$

$$f(x) < 0, \text{ gia } x < x_1$$

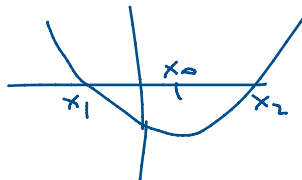
$$f(x) > 0, \text{ gia } x > x_1$$



$$3c) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 0$$

$$f(x_1) = f(x_2) = 0$$



$$f(x) > 0, \text{ gia } x < x_1 \text{ } \vee \text{ } x > x_2$$

$$f(x) < 0, \text{ gia } x_1 < x < x_2$$