

2. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με

$$f(0) = g(0) \text{ και } f'(x) > g'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι

$$f(x) < g(x) \text{ στο } (-\infty, 0) \text{ και } f(x) > g(x) \text{ στο } (0, +\infty).$$

$$f'(x) > g'(x) \Rightarrow f'(x) - g'(x) > 0 \Rightarrow (f(x) - g(x))' > 0$$

Θεωρώ $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0 \Rightarrow h \uparrow \mathbb{R}$$

$$\gamma_1 \circ x > 0 \xrightarrow{h \uparrow} h(x) > h(0) \Rightarrow f(x) - g(x) > f(0) - g(0) \Rightarrow f(x) - g(x) > 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$$

$$\gamma_2 \circ x < 0 \xrightarrow{h \uparrow} h(x) < h(0) \Rightarrow f(x) - g(x) < 0 \Rightarrow f(x) < g(x)$$

6. i) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

ii) Να αποδείξετε ότι $a^{a+1} > (a+1)^a$ για κάθε $a > e$.

iii) Να αποδείξετε ότι για $x > 0$ ισχύει $2^x = x^2 \Leftrightarrow f(x) = f(2)$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2^x = x^2$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

$$D_f = (0, +\infty) \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = e}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$$

x	0	e	$+\infty$
f'	$\parallel$	+	-
f	$\parallel$	$\nearrow$	$\searrow$

$$\text{μεγιστο } f(e) = \frac{1}{e}$$

$$f(x) = \frac{1}{e}.$$

$$\text{για } a > e \quad \text{επειδή } e < a < a+1 \xrightarrow{f \downarrow [e, +\infty)} f(a) > f(a+1) \Rightarrow$$

$$\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln(a+1)}{a+1} \Rightarrow (a+1) \ln a > a \ln(a+1) \Rightarrow$$

$$\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln(a+1)}{a+1} \Rightarrow (a+1) \ln a > a \ln(a+1) \Rightarrow$$

$$\ln a^{a+1} > \ln(a+1)^a \xrightarrow{\ln 1} a^{a+1} > (a+1)^a$$

$$n.x \quad 2024^{2025} > 2025^{2024}$$

$$0,1\mu s \quad 2,024^{2,025} < 2,025^{2,024} \quad \text{δεν}$$

$$2,024 < 2,025 < e \approx 2,71 \quad h \uparrow [0, e]$$

$$iii) \quad 2^x = x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x = \ln x^2 \Leftrightarrow x \ln 2 = 2 \ln x \xrightarrow{x \neq 0} \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(x) = f(x)}$$

$$f(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2^2}{4} = \frac{2 \ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2} = f(2)$$

$$\gamma \text{ia } x > e \quad f(x) = f(2) \Leftrightarrow f(x) = f(4)$$

$$\int_{-1}^1 [e, +\infty) \quad \boxed{x=4}$$

$$\gamma \text{ia } 0 < x < e \quad f(x) = f(2) \xrightarrow{\int_{-1}^1 [0, e]} \boxed{x=2}$$

9. i) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = e^x - \lambda x, \quad \lambda > 0.$$

ii) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει

$$e^x \geq \lambda x, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

iii) Για την τιμή του λ που θα βρείτε παραπάνω να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = e^x$.

f συνεχής και παραγώγιση στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x - \lambda$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = \lambda \Leftrightarrow x = \ln \lambda$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > \lambda \Leftrightarrow x > \ln \lambda$$

x	$-\infty$	$\ln \lambda$	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$\searrow$		$\nearrow$

$$H \text{ ελαχιστη τιμη της } f \text{ ειναι } f(\ln \lambda) = e^{\ln \lambda} - \lambda \cdot \ln \lambda = \lambda - \lambda \ln \lambda = \lambda(1 - \ln \lambda)$$

$$ii) \quad e^x \geq \lambda x, x \in \mathbb{R}$$

$$e^x - \lambda x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \min f \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda(1 - \ln \lambda) \geq 0 \xrightarrow{\lambda > 0}$$

$$e' \quad -\lambda x \geq 0 \Leftrightarrow \gamma(x) \geq 0, \quad x \leq 0 \Leftrightarrow \min \gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda(1 - \ln \lambda) \geq 0 \quad \lambda > 0 \Leftrightarrow$$

$$1 - \ln \lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln \lambda \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\lambda \leq e}$$

$$\text{Evermore } \max \lambda = e$$