

Θέμα 3ο (σύνθεση συναρτήσεων)

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \ln x$, β) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$

$g(x) > 0$
 για $x > 1$
 $g(x) > 0 \Leftrightarrow$
 $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
 για $x \leq 1$: $g(x) > 0 \Leftrightarrow$
 $x > 0$ Άρα $0 < x \leq 1$

β) $D_f = (0, +\infty)$ $D_g = \mathbb{R}$

i) $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } g(x) > 0\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x > 0\} = (0, +\infty)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln g(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x \leq 1 \\ \ln(x-1), & x > 1 \end{cases}$

ii) $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g\} = \{x > 0 \text{ και } f(x) \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \begin{cases} \ln x, & \ln x \leq 1 \\ \ln x - 1, & \ln x > 1 \end{cases} = \begin{cases} \ln x, & 0 < x \leq e \\ \ln x - 1, & x > e \end{cases}$

iii) $D_{f \circ f} = \{x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_f\} = \{x > 0 \text{ και } \ln x > 0\}$
 $= \{x > 0 \text{ και } x > 1\} = (1, +\infty)$

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \ln f(x) = \ln \ln x$

Θέμα 4ο (αποσύνθεση συναρτήσεων)

Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια ώστε να ισχύει :

α) $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν $g(x) = x + 1$,

β) $(f \circ g)(x) = \sqrt{1+x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν $g(x) = -x^2$,

γ) $f(e^x) = e^{2x} + 2x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

δ) $(g \circ f)(x) = |\sin x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν $g(x) = \sqrt{1-x^2}$

α) Θετω $g(x) = u \Leftrightarrow x + 1 = u \Leftrightarrow \boxed{x = u - 1}$
 $f(g(x)) = x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow f(u) = (u-1)^2 + 2(u-1) + 2 \Leftrightarrow$
 $f(u) = u^2 - 2u + 1 + 2u - 2 + 2 \Leftrightarrow f(u) = u^2 + 1, u \in \mathbb{R}$
ή $f(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$

β) Θετω $g(x) = u \Leftrightarrow -x^2 = u \Leftrightarrow x^2 = -u$
Επειδή $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -u \geq 0 \Leftrightarrow u \leq 0$
 $f(g(x)) = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(u) = \sqrt{1-u}, u \leq 0$
ή $f(x) = \sqrt{1-x}, x \leq 0$

γ) $f(e^x) = e^{2x} + 2x + 2, x \in \mathbb{R}$

Θέτω $e^x = u \Leftrightarrow x = \ln u$
 $e^x > 0 \Leftrightarrow u > 0$

$f(u) = u^2 + 2\ln u + 2, u > 0$
ή

$f(x) = x^2 + 2\ln x + 2, x > 0$

δ) $g(f(x)) = |\sin x|, x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \sqrt{1-x^2}$
 $\sqrt{1-f^2(x)} = |\sin x| \Leftrightarrow \sqrt{1-f^2(x)}^2 = |\sin x|^2 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{1-f^2(x)} = |\sin x| \Leftrightarrow \sqrt{1-f^2(x)}^2 = |\sin x|^2 \Leftrightarrow$$

$$1-f^2(x) = \sin^2 x \Leftrightarrow f^2(x) = 1-\sin^2 x \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) = \cos^2 x \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{\cos^2 x} \Leftrightarrow$$

$$|f(x)| = |\cos x|, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \cos x \text{ ή } f(x) = -\cos x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R} \text{ ή } f(x) = -\cos x \text{ ή } f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in A \\ -\cos x, & x \in \mathbb{R} - A \end{cases}$$

ακριβώς συνάρτηση