

Μάθημα 81ο - Προβλήματα μεγιστοποίησης - ελαχιστοποίησης

6. Να αποδείξετε ότι, από όλα τα οικόπεδα σχήματος ορθογωνίου με εμβαδό 400m^2 , το τετράγωνο χρειάζεται τη μικρότερη περιφράξη.



Έστω x, y οι διαστάσεις του ορθογωνίου $x > 0, y > 0$

$$E = 400 \Rightarrow xy = 400 \Rightarrow \boxed{y = \frac{400}{x}, x > 0} \quad (1)$$

$$\pi = 2x + 2y \stackrel{(1)}{=} 2x + \frac{800}{x}, x > 0$$

Θεωρώ $\pi(x) = 2x + \frac{800}{x}, x > 0$

$$\pi'(x) = 2 - \frac{800}{x^2}$$

$$\pi'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{800}{x^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 400 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x = 20$$

$$\pi'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{800}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{800}{x^2} < 2 \Leftrightarrow x^2 > 400 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2} > \sqrt{400} \Leftrightarrow |x| > 20 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x > 20$$

x	0	20	∞
π'	+	-	+
π	↗	↘	↗

(ελαχιστο για $x = 20$ και

$$y) \Rightarrow y = 20$$

Άρα δίνεται ελαχιστο όταν $x = y = 20$
δηλαδή τετράγωνο.

7. Με συρματοπλέγμα μήκους 80m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου. Να βρείτε τις διαστάσεις του οικοπέδου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.



Έστω x, y οι διαστάσεις $x > 0, y > 0$

$$\pi = 80 \Rightarrow 2x + 2y = 80 \Rightarrow x + y = 40 \Rightarrow$$

$$\boxed{y = 40 - x} \quad (1) \text{ και επειδή } y > 0 \Rightarrow 40 - x > 0 \Rightarrow \boxed{x < 40}$$

$$E = xy \stackrel{(1)}{\Rightarrow} E = x(40 - x) = 40x - x^2, 0 < x < 40$$

Θεωρώ $F(x) = 40x - x^2, 0 < x < 40$

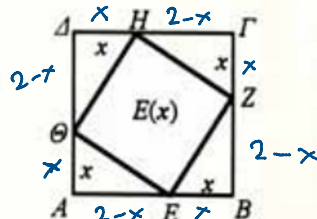
$$F'(x) = 40 - 2x$$

x	0	20	40
F'	+	0	-
F	↗	↘	↗

max για $x = 20$
οπότε $y = 20$
και άρα τετράγωνο

9. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο $EZH\Theta$ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του $AB\Gamma\Delta$,

- i) να εκφράσετε την πλευρά EZ συναρτήσει του x .



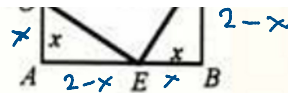
$$(\Theta E Z H) = E Z^2$$

$$\text{Πυθαγόρειο στο } \triangle E B Z$$

$$E Z^2 = E B^2 + B Z^2$$

i) να εκφράσετε την πλευρά EZ συναρτήσει του x .

ii) να βρείτε το x έτσι, ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του $EZH\Theta$ να γίνει ελάχιστο.



Πυθαγόρειο στο $E\bar{B}Z$
 $EZ^2 = EB^2 + BZ^2$
 $= x^2 + (2-x)^2 =$

ii) $E(x) = EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4, 0 < x < 2$

$E'(x) = 4x - 4$

x	0	1	2
E'	-	0	+
E		$\rightarrow$	$\nearrow$

Ελάχιστο για $x=1$ που σημαίνει ότι τα σημεία E, Z, H, Θ γίνονται τα άκρα των πλευρών του $ABCD$

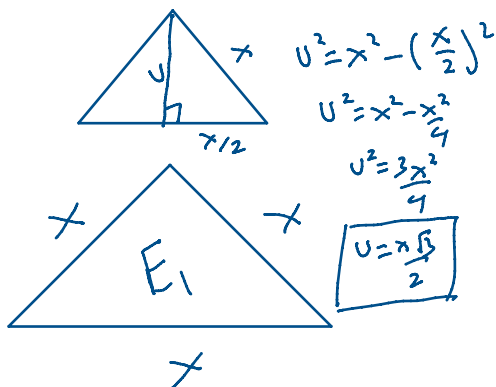
$EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4$

$EZ = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}, 0 < x < 2$

7. Με ένα σύρμα μήκους 4m κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς x m και ένα τετράγωνο πλευράς y m.

i) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων συναρτήσει της πλευράς x του ισόπλευρου τριγώνου.

ii) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο.



$E_1 = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$



$E_2 = y^2 \xrightarrow{u)}$

$E_2 = \left(\frac{4-3x}{4}\right)^2$

$\pi_1 + \pi_2 = 4$

$3x + 4y = 4$

$4y = 4 - 3x$

$y = \frac{4-3x}{4} \quad (1)$

Θμω $x > 0$ και $y > 0 \Rightarrow \frac{4-3x}{4} > 0 \Rightarrow x < \frac{4}{3}$

Τελικά $0 < x < \frac{4}{3}$

$E(x) = E_1 + E_2 = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{16 - 24x + 9x^2}{16}, 0 < x < \frac{4}{3}$

$E'(x) = \frac{\sqrt{3} \cdot x}{2} + \frac{-24 + 18x}{16} = \frac{\sqrt{3} \cdot x}{2} + \frac{9x - 12}{8} = \frac{(9 + 4\sqrt{3})x - 12}{8}$

$E'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{12}{9 + 4\sqrt{3}} = \frac{12(9 - 4\sqrt{3})}{81 - 48} = \frac{12(9 - 4\sqrt{3})}{33} = \frac{4(9 - 4\sqrt{3})}{11}$

x	0	$\frac{4(9-4\sqrt{3})}{11}$	$4/3$
E'	-	0	+
E		$\rightarrow$	$\nearrow$

Ελάχιστο για $x = \frac{4(9-4\sqrt{3})}{11}$