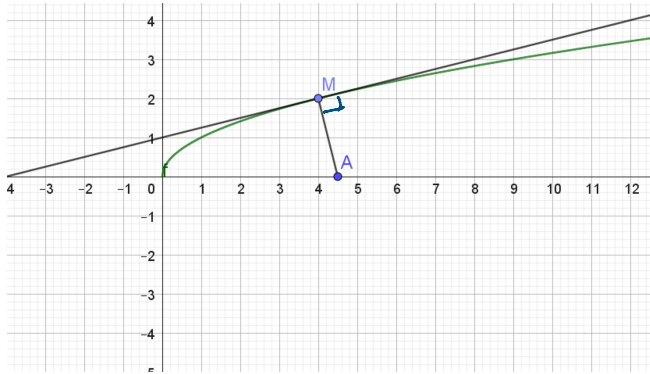


8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A\left(\frac{9}{2}, 0\right)$.

i) Να βρείτε το σημείο M της C_f που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση.

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο M είναι κάθετη στην AM .



Έστω $M(x, \sqrt{x})$ τυχαίο σημείο της C_f όπως $x \geq 0$

$$(AM) = \sqrt{\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 9x + \frac{81}{4} + x} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 8x + \frac{81}{4}}, \quad x \geq 0$$

Θεωρώ $g(x) = \sqrt{x^2 - 8x + \frac{81}{4}}, \quad x \geq 0$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 8x + \frac{81}{4}}} \cdot (2x - 8)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 8 > 0 \Leftrightarrow x > 4$$

x	0	4	το
g'	-	0	+
g	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Ελάχιστο για $x = 4$

Η ελάχιστη απόσταση (AM) επιτυγχάνεται όταν $M(4, 2)$

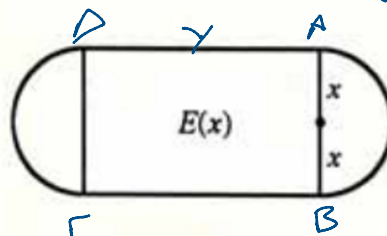
$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$t_n: y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \quad \Delta t_n = \frac{1}{4}$$

$$\Delta_{AM} = \frac{2 - 0}{4 - \frac{9}{2}} = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4. \quad \text{Άρα } \Delta t_n \cdot \Delta_{AM} = -4 \cdot \frac{1}{4} = -1$$

$t_n \perp AM$

9. Όπως γνωρίζουμε, ο στίβος του κλασικού αθλητισμού αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δύο ημικύκλια. Αν η περίμετρος του στίβου είναι 400m, να βρείτε τις διαστάσεις του, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου μέρους να γίνει μέγιστο.



$$\mathcal{T} = 400 \Rightarrow AD + l_{\Gamma\Delta} + \Gamma B + l_{AB} = 400 \Rightarrow$$

$$y + \pi x + y + \pi x = 400 \Rightarrow$$

$$2y + 2\pi x = 400 \Rightarrow$$

$$2(y + \pi x) = 400 \Rightarrow$$

$x > 0$
και

$$\gamma + \pi x = 200 \Rightarrow$$

$$\boxed{\gamma = 200 - \pi x} \quad (1)$$

$$\gamma > 0 \xrightarrow{(1)} 200 - \pi x > 0$$

$$x < \frac{200}{\pi}$$

$$\text{Τελικά } x \in (0, \frac{200}{\pi})$$

$$(ABGD) = AB \cdot BG = \gamma \cdot 2x \stackrel{(1)}{=} (200 - \pi x) 2x = 400x - 2\pi x^2, x \in (0, \frac{200}{\pi})$$

$$\text{Θαρω } E(x) = 400x - 2\pi x^2, x \in (0, \frac{200}{\pi})$$

$$E'(x) = 400 - 4\pi x$$

$$E'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{100}{\pi}$$

x	0	$\frac{100}{\pi}$	$\frac{200}{\pi}$
E'		+	-
E		↗	↘

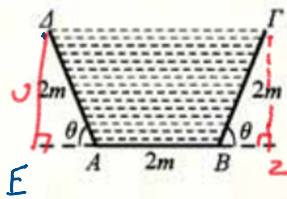
$$E(x) \text{ μέγιστο για } x = \frac{100}{\pi} \text{ και } (1) \rightarrow \boxed{y = 100}$$

12. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανάλι του οποίου η κάθετη διατομή $ABGD$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της διατομής $ABGD$ είναι ίσο με

$$E = 4\eta\mu\theta(1 + \sin\theta)$$

ii) Για ποια τιμή του θ το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται;



Φέρω τα ύψη

$\Delta E, \Gamma Z$

Είμαι $AE = BZ$

$\triangle AED$

$$\eta\mu\theta = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2\eta\mu\theta$$

$$\sin\theta = \frac{AE}{2} \Rightarrow AE = 2\sin\theta$$

$$\Gamma D = EZ = EA + AB + BZ$$

$$= 2\sin\theta + 2 + 2\sin\theta$$

$$= 2 + 4\sin\theta$$

$$\begin{aligned} (ABGD) &= \frac{(AB + GD) \cdot \Delta E}{2} = \frac{(2 + 4\sin\theta + 2) \cdot 2\eta\mu\theta}{2} \\ &= (4 + 4\sin\theta) \eta\mu\theta = 4\eta\mu\theta(1 + \sin\theta), \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

$$E(\theta) = 4\eta\mu\theta(1 + \sin\theta), \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$E'(\theta) = 4\sin\theta(1 + \sin\theta) + 4\eta\mu\theta(-\eta\mu\theta) = 4\sin\theta + 4\sin^2\theta - 4\eta\mu^2\theta$$

$$E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 4\sin\theta + 4\sin^2\theta - 4\eta\mu^2\theta = 0$$

$$\sin\theta + \sin^2\theta - \eta\mu^2\theta = 0$$

$$\sin\theta + \sin^2\theta - (1 - \sin^2\theta) = 0$$

$$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$$

$$\text{Θέτω } \sin\theta = w$$

$$2w^2 + w - 1 = 0$$

$$w = -1 \quad \text{ή} \quad w = \frac{1}{2}$$

$$E'(\frac{\pi}{6}) =$$

$$4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

$$2\sqrt{2} > 0$$

