

Θέμα 6°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - x)$. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής

$D_f = \mathbb{R}$ δώτε $e^x \geq x+1 > x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

f παραγωγιστή $\hookrightarrow$ πρώτα παραγωγιστική

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}, \quad f''(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

$$= \frac{(2-x)e^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

Θεωρώ $g(x) = (2-x)e^x - 1, x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = -e^x + (2-x)e^x = e^x(1-x)$$

x	$-\infty$	x_1	1	x_2	$+\infty$
g'		+	0	-	
g		-	0	+	

Sign chart for g(x) showing intervals: $-\infty$ to x_1 is -, x_1 to 1 is +, 1 to x_2 is -, and x_2 to $+\infty$ is -.

$$g(1) = e - 1 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((2-x)e^x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((2-x)e^x - 1) = -1$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
g''	-	0	+	-
g		↖	↗	

Sign chart for g''(x) showing intervals: $-\infty$ to x_1 is -, x_1 to x_2 is +, and x_2 to $+\infty$ is -. Arrows indicate the shape of g(x) between these points.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{e^{-x}} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} = 0$$

Θέμα 9°

Εστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και κυρτή για την οποία ισχύει ότι $f'(1) > 0$. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

f κυρτή $\Rightarrow f' \nearrow \mathbb{R}$

(ε): $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y = f'(1)x + f(1) - f'(1)$

f κυρτή $\Rightarrow \exists f$ πάνω από $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ με εξαίρεση μόνο το σημείο επαφής

f κυρίως $\Rightarrow$ $\mathcal{C}_f$ πάνω από $x_0 - (\epsilon)$ με εξαίρεση μόνο το σημείο εκείνο
 οπότε $f(x) \approx g'(x_0)x + g(x_0) - g'(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g'(x_0)x + g(x_0) - g'(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} g'(x_0)x = x_0 \text{ αφού } g'(x_0) > 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$$

Θέμα 7°

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $P(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους.

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = P(x-1) - \lambda - 3$ είναι περιττή και με βάση αυτό να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της $P(x)$ έχει κέντρο συμμετρίας το K .

δ) Αν η f παρουσιάζει δυο τοπικά ακρότατα και x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων, να αιτιολογήσετε γιατί το K είναι το μέσο των σημείων $A(x_1, P(x_1)), B(x_2, P(x_2))$, για όλες τις τιμές του λ που βρήκατε στο γ) ερώτημα.

$$\alpha) P'(x) = 3x^2 + 6x - \lambda$$

$$P''(x) = 6x + 6$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
P''	-	0	+
P		δ.κ	

$$K(-1, P(-1)) = (-1, \lambda + 3)$$

$$\beta) P'(x) = 3x^2 + 6x - \lambda$$

$$\Delta = 36 + 12\lambda$$

1η) Αν $\Delta < 0$ τότε $P'(x) > 0 \rightarrow P(x)$ ή αυξάνεται συνεχώς

2η) Αν $\Delta = 0$ τότε $P'(x) \geq 0 \rightarrow P(x)$ ή αυξάνεται συνεχώς
 $T_0 = \text{για μια μοναδική}$

$$3η) \text{ Αν } \Delta > 0$$

x	x_1	x_2
P'	-	+
P	τοπ. μέγ.	τοπ. ελάτ.

Συνεπώς έχει ακρότατα αν και μόνο αν
 $\Delta > 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda > -3}$

$$\begin{aligned}
 8) \quad g(x) &= p(x-1) - 2 - 3 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 - 2(x-1) + 1 - 2 - 3 = \\
 &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 6x + 3 - 2x + 2 + 1 - 2 - 3 = \\
 &= x^3 - (2+3)x
 \end{aligned}$$

$$g(-x) = (-x)^3 - (2+3)(-x) = -x^3 + (2+3)x = -g(x)$$

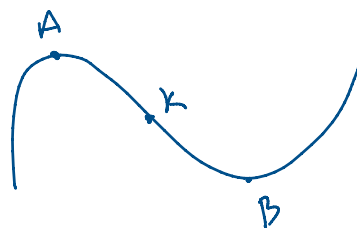
Άρα g περιζωί πάλι η g έχει κέντρο συμμετρίας
το $O(0,0)$

Όπως $g(x) = p(x-1) - 2 - 3$ δηλαδή η g είναι μετατόπιση
προς C_p 1 μονάδα δεξιά και $2+3$ μονάδες κάτω

Συνεπώς το $K(-1, 2+3)$ είναι κέντρο συμμετρίας
προς C_p .

$$x_A + x_B = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{3} = -2$$

οπότε $\frac{x_A + x_B}{2} = -1 = x_K$



Αφού K κέντρο συμμετρίας τα A, B είναι
συμμετρικά ως προς K .