

1. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις **κατακόρυφες** ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

ii) $f(x) = \tan x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

iii) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1}$

iv) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Άρα $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη

i) $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

f συνεχής

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$ οπότε η $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

ii) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = +\infty$ οπότε $x = \frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \left(\sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = -\infty$ οπότε $x = -\frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

iii) $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ f συνεχής ως ρητή

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(2x-3)}{1} = -1$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(2x-3)}{1} = -1$

δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη

2. Να βρείτε τις **οριζόντιες** ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$

ii) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

i) $D_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \rightarrow y=1$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \rightarrow y=1$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

ii) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, \quad x \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x \right) \stackrel{x \rightarrow +\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x) =$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -x(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1) = +\infty \quad \text{Άρα στο } +\infty \text{ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2+1} - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0 \quad \text{'Άρα } y=0 \text{ οριζόντια ασύμπτωτη στο } +\infty \end{aligned}$$

3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$

ii) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$

iii) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

6) $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ & συνεχής ως προς

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - x - 2) \cdot \frac{1}{x-1} \xrightarrow{-2(+\infty)} -\infty \rightarrow \boxed{x=1} \text{ κατακόρυφη ασύμπτωτη}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 2 - x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{x - 1} = 0$$

Άρα $y=x$ παράγεται ασύμπτωτη στο $+\infty$.

• Ομοίως $y=x$ παράγεται ασύμπτωτη στο $-\infty$.