

1. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ ii) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ iii) $f(x) = x^4 - 2x^2$.

i) $D_f = \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'(x) = 0$$

$$f''(x) = 0$$

$$3(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$x = 1$$

$$x = 3 \text{ ή } x = -1$$

x	-∞	-1	1	3	∞
f'	+	0	-	0	+
f''	-	-	0	+	+
f					

T.P. $f(-1) = 16$ S.K. $(1, f(1)) = (1, 0)$ T.G. $f(3) = -16$

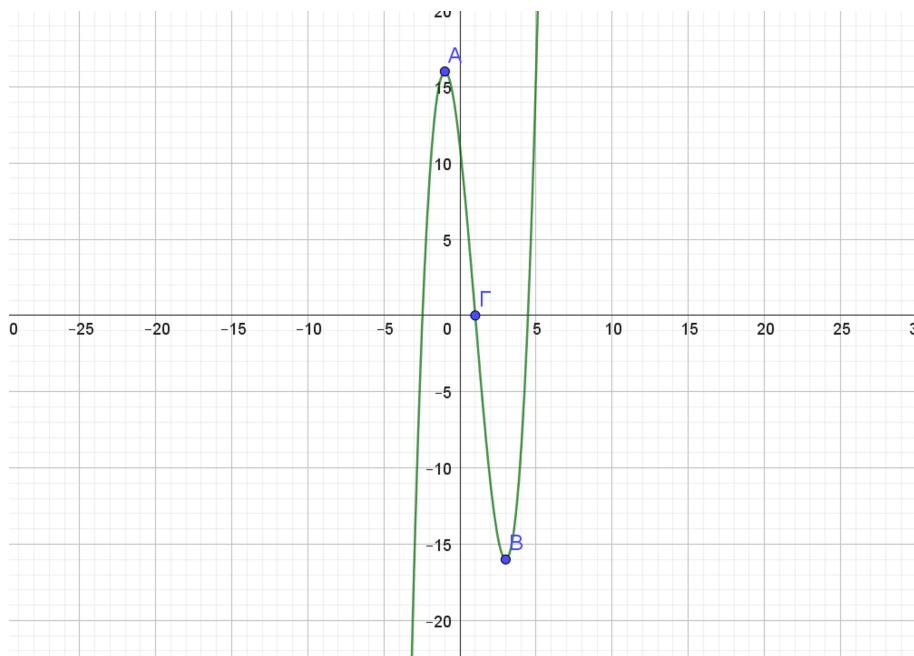
f συνεχώς σε $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$$

δεν έχει ούτε οριζόντιες ούτε ογκοειδείς ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



ii) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

$D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, παραγωγίσιμη και συνεχώς ως ρηδή

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{+4(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

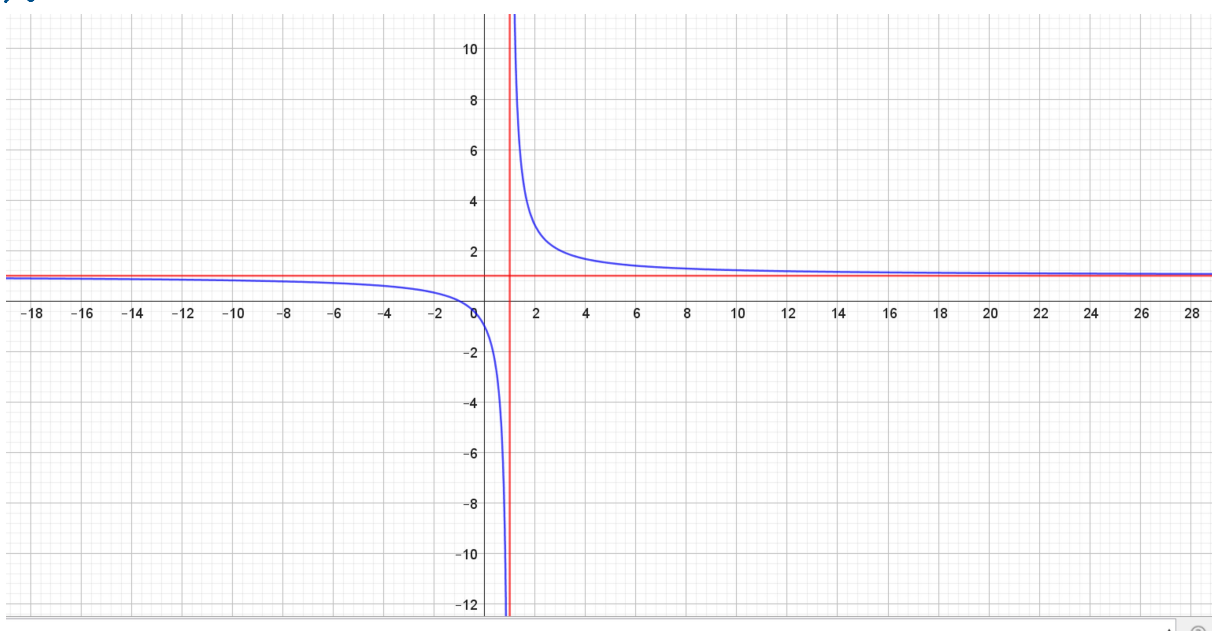
x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-	-	-
f''	-	+	+
f			

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 1 \rightarrow y=1 \text{ οριζόντια ασύμπτωτη στο } \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 1 \rightarrow y=1 \text{ ———— || ———— στο } -\infty$$



2. Ομοίως τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

ii) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$

$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ συνεχής και παραγωγισίμη ως άθροισμα παραγωγισίμων

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \quad \left| \quad f''(x) = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} \right.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
f'		+	0	-	-	0	+
f''		-	-	-	+	+	+
f							

$\nearrow$ $\nwarrow$ $\nwarrow$ $\nearrow$
 $\tau. \mu$ $\tau. \mu$
 $f(-1) = -2$ $f(1) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Κατακόρυφη ασύμπτωτη
 $\cup \quad x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

$x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

} $y=x$ ηλ' άστια
ασυμπτωτική
σε $+\infty$

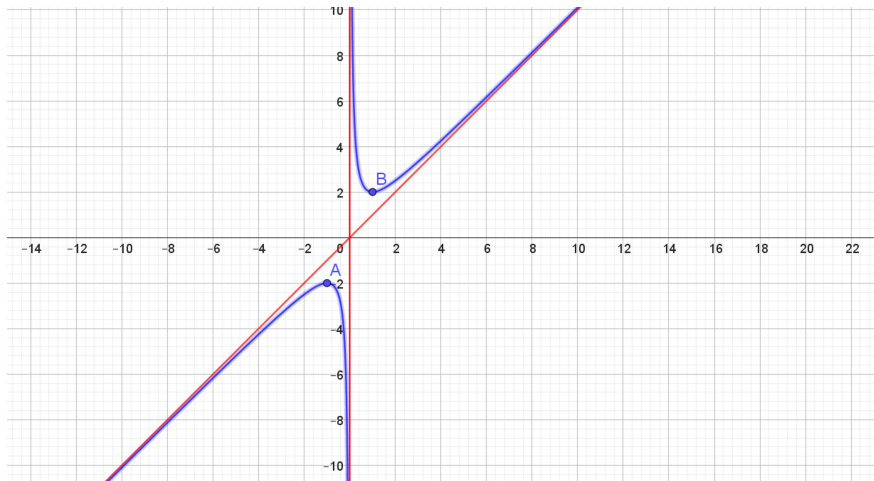
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

} $y=x$ ηλ' άστια
ασυμπτωτική
σε $-\infty$



3. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = x + \eta \mu x$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

f συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων

$$f'(x) = 1 + \sigma \omega x \geq 0$$

$$T_0 = \mu \epsilon x \geq 0, x \geq -\pi$$

$$f''(x) = -\eta \mu x$$

$$f''(x) = 0$$

$$x = -\pi, x = 0, x = \pi$$

f συνεχής σε κλειστά διαστήματα

οπότε ασύμπτωτες δεν έχει

x	$-\pi$	0	π
f'	$\nearrow$	$+$	$\nearrow$
f''	$\nearrow$	$+$	$\searrow$
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
	T.G	S.K	T.P
	$f(-\pi) = -\pi$	$(0,0)$	$f(\pi) = \pi$

