

Θέμα 5ο (ερωτήσεις κατανόησης)

Χαρακτηρίστε με Σ ή Λ τις παρακάτω προτάσεις και για όσες είναι λάθος να βρείτε ένα αντιπαράδειγμα.

1. Αν $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $f(x) = 0$ ή $g(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Σ**
2. Αν $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Λ**
3. Αν $f^2(x) = g^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Σ**
4. Αν $f^2(x) = g^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Λ**
5. Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ και $A \cap B = \emptyset$ τότε η $f + g$ δεν ορίζεται. **Σ**
6. Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ και $f(A) \cap B = \emptyset$ τότε η $g \circ f$ δεν ορίζεται. **Σ**
7. Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ και $f(A) \subseteq B$ τότε η $D_{g \circ f} = A$. **Σ**
8. Για κάθε συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει ότι $f(x_1) = f(x_2)$ τότε και $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$. **Λ** Διότι μπορεί $f(x_1), f(x_2) \leq 0$ δηλ. $f(x_1), f(x_2) \notin D_f$
9. Για κάθε συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ αν ισχύει ότι $f(x_1) = f(x_2)$ τότε και $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$. **Σ** αφού το σύνολο αφίξεως είναι $(0, +\infty)$ οπότε $f(x_1), f(x_2) > 0$ δηλ. $f(x_1), f(x_2) \in D_f$
10. Αν $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$ τότε και $D_g = \mathbb{R}$. **Λ**
11. Αν $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$ τότε και $D_f = \mathbb{R}$. **Σ** αφού $D_{g \circ f} \subseteq D_f$

π.χ για το 2) $f(x) = \begin{cases} 3, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 5, & x \leq 0 \end{cases}$

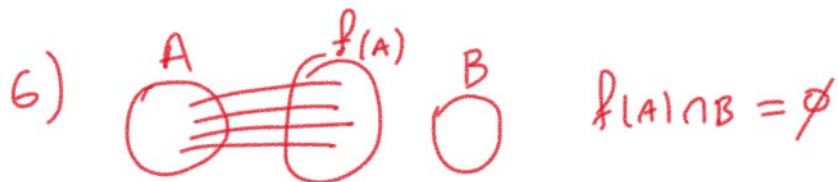
$$f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} 3 \cdot 0, & x > 0 \\ 0 \cdot 5, & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

οπότε $f(x) \cdot g(x) = 0, x \in \mathbb{R}$

π.χ για το 4) $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ $g(x) = x, x \in \mathbb{R}$

$$g^2(x) = x^2, x \in \mathbb{R} \quad f^2(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ (-x)^2, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f^2(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$$

π.χ $A \xrightarrow{f} B$



Ar $f(A) \not\subseteq B$



8) n.x $f(x) = \ln x, x > 0$
 $f(1) = \ln 1 = 0$
 $f(f(1)) = f(0)$ Ser opigetar

av $x_1 = x_2 \rightarrow 0 \in$
 $f(x_1) = f(x_2)$ gila
 kan $x_1, x_2 \in D_f$

av $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow 0 \in$
 $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ av
 $f(x_1), f(x_2) \in D_f$

10) $g(x) = \ln x$ $f(x) = x^2 + 1$

$D_g = (0, +\infty)$

$D_f = \mathbb{R}$

$D_{g \circ f} = \left\{ x \in D_f \text{ kan } f(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ kan } x^2 + 1 > 0 \right\}$
 $\Rightarrow D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

is $x \in \mathbb{R}$ so
kan $x \in \mathbb{R}$

Θέμα 6ο (συναρτησιακές σχέσεις)

Δίνεται μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) = 4x - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

α) $f(4x - 3) = 4f(x) - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) η C_f τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας xOy σε ένα τουλάχιστον σημείο.

α) $f(f(x)) = 4x - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 Για x το $f(x)$ έχω $f(f(f(x))) = 4f(x) - 3 \Rightarrow$
 $f(4x - 3) = 4f(x) - 3, x \in \mathbb{R}$
 β)
 Παρατήρηση: Α.ν.δ.ο. υπάρχει $x_0 \in \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ με $f(x_0) = x_0$
 Για $x = 1$: $f(4 \cdot 1 - 3) = 4f(1) - 3 \Rightarrow$
 $f(1) - 4f(1) = -3 \Rightarrow -3f(1) = -3 \Rightarrow f(1) = 1$

Ένας μαθητής στην προσπάθειά του να λύσει το β) απάντησε ως εξής:

Αναζητούμε $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$. Έστω ότι $f(x_0) = x_0$. Τότε είναι και $f(f(x_0)) = f(x_0) \Leftrightarrow 4x_0 - 3 = x_0 \Leftrightarrow 3x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = 1$

Συνεπώς $f(1) = 1$ οπότε η C_f τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας xOy στο σημείο $(1, 1)$.

Εξετάστε αν η λύση του είναι σωστή:

Λάθος διότι θεωρούμε την ύπαρξη του x_0 δεδομένη χωρίς να είναι

Θέμα 7ο (συναρτησιακές σχέσεις)

Δίνεται μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x^2) + f(x) = x^4 - x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα xx' σε δύο τουλάχιστον σημεία.

Α.ν.δ.ο. υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ($x_1 \neq x_2$)
 με $f(x_1) = f(x_2) = 0$
 Για $x = 0$ συν. (1): $f(0) + f(0) = 0^4 - 0$
 $2f(0) = 0$
 $f(0) = 0$
 Για $x = 1$ συν. (1): $f(1) + f(1) = 1^4 - 1$
 $2f(1) = 0$
 $f(1) = 0$

(Προκειμένου)
 $x^2 = x$
 $x^2 - x = 0$
 $x(x - 1) = 0$
 $x = 0$ ή $x = 1$

$$\Gamma_{1,0} \quad x=1 \quad \text{σημ} (1) : f(1) + f(1) = 1^4 - 1$$

$$2f(1) = 0$$

$$f(1) = 0$$

Συνεπώς η f τρέχει τον x σε δύο τοπικά κρίσιμα σημεία
τα $(0,0)$ και $(1,0)$