

Μάθημα 90ο - Θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$

ii) $\int_1^e \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}} dx$

iii) $\int_0^{\pi/2} (\sin x - 2 \eta \mu x) dx$

iv) $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

i) $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx = \left[x^3 - x^2 + x \right]_0^2 = 2^3 - 2^2 + 2 - 0 = 6$

ii) $\int_1^e \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}} dx = \int_1^e \frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \int_1^e \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \right) dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + x^{-\frac{3}{2}} \right) dx$
 $= \left[\ln x + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_1^e = 1 - 2e^{-\frac{1}{2}} + 2 = 3 - \frac{2}{\sqrt{e}}$

iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - 2 \eta \mu x) dx = \left[-\cos x + 2 \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + 0 - (0 + 2) = -1$

iv) $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_1^2 \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} \right]_1^2 = \dots$

2. Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^2 \frac{x^3+7x}{x^2+5} dx + 2 \int_2^1 \frac{x}{x^2+5} dx = \frac{3}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{x^3+7x}{x^2+5} dx - 2 \int_1^2 \frac{x}{x^2+5} dx = \int_1^2 \left(\frac{x^3+7x}{x^2+5} - \frac{2x}{x^2+5} \right) dx = \int_1^2 \frac{x^3+5x}{x^2+5} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{x(x^2+5)}{x^2+5} dx = \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

3. Να αποδείξετε ότι

$$2 \int_a^b f(x) f'(x) dx = (f(b))^2 - (f(a))^2$$

$$2 \int_a^b f(x) f'(x) dx = \int_a^b 2 f(x) f'(x) dx = \left[f^2(x) \right]_a^b = f^2(b) - f^2(a)$$

4. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(0,0)$ και $B(1,1)$, να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 f'(x) dx$, εφόσον η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$.

$$\int_0^1 f'(x) dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = 1 - 0 = 1$$

6. i) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

ii) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(1 + \sqrt{2})$.

i) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

ii) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 f'(x) dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \ln(1 + \sqrt{2})$

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} dx = \int_4^6 \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} dx = [\sqrt{x^2 - 4}]_4^6 = \sqrt{32} - \sqrt{12} = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}$

8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_0^2 (x^2 - |x-1|) dx$ ii) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$, αν $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \eta \mu x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

iii) $\int_0^3 |x^2 - 3x + 2| dx$.

δεν έχει σημασία
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta \mu x = 0$
 $f(0) = 0$

i) $\int_0^2 (x^2 - |x-1|) dx = \int_0^1 (x^2 - (-x+1)) dx + \int_1^2 (x^2 - (x-1)) dx =$

$$\int_0^1 (x^2 + x - 1) dx + \int_1^2 (x^2 - x + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 =$$

ii) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^0 x dx + \int_0^{\pi} \eta \mu x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^0 + [\sin x]_0^{\pi} = \dots$